Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-02-17 au 2025-02-21

Série 1 du lundi 17 février 2025

Exercice 1.

1) Démontrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \tag{1.1}$$

où $p \in \,]1, +\infty[$ et q est tel que $1/p + 1/q = 1$.

Indication. Utiliser le fait que la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est concave et appliquer ln à la relation d'inégalité.

2) Démontrer que si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ où $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et si $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité de Hölder :

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q \tag{1.2}$$

où $p \in [1, +\infty]$ et $1/p + 1/q = 1$ (avec la convention $1/+\infty = 0$).

Indication. Lorsque $p, q \in \,]1, +\infty[$, poser $\lambda = \|\boldsymbol{x}\|_p^{-1/q} \|\boldsymbol{y}\|_q^{1/p}$ et utiliser le point 1 après avoir écrit $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda |x_i| \times \frac{1}{\lambda}|y_i|$.

3) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \in [1, +\infty]$ mais, lorsque $n \geqslant 2$, pas pour $p \in \,]0, 1[$.

Indication. Pour $p \in]1, \infty[$, partir de $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$ et utiliser le point 2 ci-dessus.

4) Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ et $q \in \mathbb{R}$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n^{1/q} \, \|\boldsymbol{x}\|_p \quad \text{si } p \neq 1, \tag{1.3}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant n^{1/p} \, \|\boldsymbol{x}\|_\infty \quad \text{si } p \neq +\infty, \tag{1.4}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1. \tag{1.5}$$

En déduire que toutes les normes $\{\|\cdot\|_p : p \in [1, +\infty]\}$ sont équivalentes.

Exercice 2.

Soient $f, g \in C^0([0, 1])$ (autrement dit, deux fonctions continues sur $[0, 1]$). On définit

$$\phi(f, g) = \int_0^1 fg \tag{2.1}$$

1) Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $C^0([0, 1])$.

2) Montrer que $|\phi(f,g)| \leqslant \phi(f,f)^{1/2}\phi(g,g)^{1/2}$ en suivant la démonstration de l'inégalité de Cauchy–Schwarz donnée au cours.

Exercice 3.

1) Soit un espace métrique (M,d) et une fonction continue $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. On suppose que : (I) $h(0) = 0$; (II) h est dérivable sur $]0,+\infty[$; (III) $h' > 0$ sur $]0,+\infty[$; et (IV) h' est décroissante sur $]0,+\infty[$. Prouver que $\tilde{d} = h \circ d$ est aussi une distance sur M.
2) Si $V \neq \{0\}$ est un espace vectoriel équipé d'une norme N, d est la distance induite par N et $h(x) = x/(1+x)$ pour $x \geqslant 0$, prouver que $\tilde{d} = h \circ d$ est une distance, mais qu'elle n'est induite par aucune norme.