Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-02-17 au 2025-02-21

Série 1 du lundi 17 février 2025

Exercice 1.

1) Démontrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \tag{1.1}$$

où $p \in \,]1, +\infty[$ et q est tel que $1/p + 1/q = 1$.

Indication. Utiliser le fait que la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est concave et appliquer ln à la relation d'inégalité.

2) Démontrer que si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ où $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et si $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité de Hölder :

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q \tag{1.2}$$

où $p \in [1, +\infty]$ et $1/p + 1/q = 1$ (avec la convention $1/+\infty = 0$).

Indication. Lorsque $p, q \in \,]1, +\infty[$, poser $\lambda = \|\boldsymbol{x}\|_p^{-1/q} \|\boldsymbol{y}\|_q^{1/p}$ et utiliser le point 1 après avoir écrit $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda |x_i| \times \frac{1}{\lambda}|y_i|$.

3) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \in [1, +\infty]$ mais, lorsque $n \geqslant 2$, pas pour $p \in \,]0, 1[$.

Indication. Pour $p \in]1, \infty[$, partir de $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$ et utiliser le point 2 ci-dessus.

4) Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ et $q \in \mathbb{R}$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n^{1/q} \|\boldsymbol{x}\|_p \quad \text{si } p \neq 1, \tag{1.3}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant n^{1/p} \|\boldsymbol{x}\|_\infty \quad \text{si } p \neq +\infty, \tag{1.4}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1. \tag{1.5}$$

En déduire que toutes les normes $\{\|\cdot\|_p : p \in [1, +\infty]\}$ sont équivalentes.

Solution

1) Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité est triviale. On suppose donc que $a > 0$ et $b > 0$. Si on pose $f(s) = \ln s$, on a $f'(s) = s^{-1}$ et $f''(s) = -s^{-2} < 0$ pour tout $s \in \,]0, +\infty[$. Ainsi, la fonction $g := -\ln$ est convexe. Puisque $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$g\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \leqslant \frac{1}{p}g(a^p) + \frac{1}{q}g(b^q) \tag{1.6}$$

et par suite

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab). \tag{1.7}$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a bien

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \tag{1.8}$$

2) Distinguons trois cas.

Cas $p = +\infty$. Alors $q = 1$ et, pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| = \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \sum_{i=1}^n |y_i| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty \|\boldsymbol{y}\|_1. \tag{1.9}$$

Cas $p = 1$. Alors $q = +\infty$. On inverse les rôles de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ pour obtenir

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| = |\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_\infty \|\boldsymbol{x}\|_1. \tag{1.10}$$

Cas $p \in \,]1, +\infty[$. Alors $q = {}^p/_{(p-1)}$. Si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ou $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, l'inégalité est triviale. On suppose donc $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$. On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et en utilisant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| = \sum_{i=1}^n \lambda|x_i|\frac{1}{\lambda}|y_i| && (1.11)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^p}{p}|x_i|^p + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q\lambda^q}|y_i|^q = \frac{\lambda^p}{p}\|\boldsymbol{x}\|_p^p + \frac{1}{q\lambda^q}\|\boldsymbol{y}\|_q^q. && (1.12)\end{aligned}$$

Si on pose $\lambda = \|\boldsymbol{x}\|_p^{-1/q}\,\|\boldsymbol{y}\|_q^{1/p}$, puisque $p - {}^p/_q = q - {}^q/_p = 1$, on obtient :

$$\lambda^p \|\boldsymbol{x}\|_p^p = \|\boldsymbol{x}\|_p^{p-p/q}\|\boldsymbol{y}\|_q = \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q \tag{1.13}$$

et

$$\lambda^{-q}\|\boldsymbol{y}\|_q^q = \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q^{q-q/p} = \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q. \tag{1.14}$$

Ainsi,

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \frac{1}{p}\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q + \frac{1}{q}\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q = \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q. \tag{1.15}$$

3) Distinguons à nouveau trois cas.

Cas $p = +\infty$. Montrons l'inégalité triangulaire. Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i + y_i| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i| + |y_i|) && (1.16)\\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| + \max_{1\leqslant j\leqslant n}|y_j| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty. && (1.17)\end{aligned}$$

Les autres propriétés d'une norme sont vérifiées trivialement.

Cas $p \in [1, +\infty[$. Montrons l'inégalité triangulaire. Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \tag{1.18}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} \tag{1.19}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \; |x_i + y_i|^{p-1}. \tag{1.20}$$

Si $p = 1$, on en déduit immédiatement l'inégalité triangulaire. Si $p \in]1, +\infty[$, on utilise l'inégalité de Hölder :

$$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|_p \|\boldsymbol{b}\|_q \tag{1.21}$$

avec

$$\boldsymbol{a} = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad \text{et } \boldsymbol{b} = (|x_1+y_1|^{p-1}, |x_2+y_2|^{p-1}, \dots, |x_n+y_n|^{p-1}). \tag{1.22}$$

Puisque ${}^1\!/\!_p + {}^1\!/\!_q = 1$, on a $(p-1)q = p$ ainsi que ${}^p\!/\!_q = p-1$, et on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} = |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|_p \|\boldsymbol{b}\|_q \tag{1.23}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \tag{1.24}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p} \right)^{1/q} \tag{1.25}$$
$$= \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1} \tag{1.26}$$

On obtient de même

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_p \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1} \tag{1.27}$$

et on a donc

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p \leqslant \left(\|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p \right) \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}. \tag{1.28}$$

Si $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \neq 0$ on a l'inégalité triangulaire en divisant de part et d'autre par $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$. Si $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p = 0$, on l'a aussi trivialement. Les autres propriétés d'une norme sont vérifiées trivialement.

Cas $p \in]0, 1[$. Supposons $n \geqslant 2$ et montrons que $\|\cdot\|$ n'est pas une norme. Soit $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{y} = (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Puisque $\|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{y}\|_p = 1$ et $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p = 2^{1/p} > 2$, l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée. Par conséquent, $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme.

4) Si $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $|\boldsymbol{x}| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. Montrons les inégalités suivantes :

— En choisissant $\boldsymbol{y} = (1, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ dans le point 2, on obtient :

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \langle |\boldsymbol{x}|, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q = n^{1/q} \|\boldsymbol{x}\|_p \tag{1.29}$$

où $p \in \,]1, +\infty]$, and $1/p + 1/q = 1$.

— Pour $p \in [1, +\infty[$, on a

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(n \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \right)^p \right)^{1/p} = n^{1/p} \|\boldsymbol{x}\|_\infty. \tag{1.30}$$

— On a également

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\boldsymbol{x}\|_1. \tag{1.31}$$

Montrons maintenant que toutes les normes $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in [1, +\infty]\}$, sont équivalentes. Soit donc $p \in [1, +\infty[$ et $r \in]1, +\infty]$. On a, pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n^{1/s} \|\boldsymbol{x}\|_r \tag{1.32}$$

et

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant n^{1/p} \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant n^{1/p} \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n^{1/p} n^{1/s} \|\boldsymbol{x}\|_r = n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{s}} \|\boldsymbol{x}\|_r \tag{1.33}$$

avec $1/r + 1/s = 1$. Ces inégalités montrent que n'importe quelle norme $\|\cdot\|_\alpha$ peut être majorée par n'importe quelle autre norme $\|\cdot\|_\beta$ multipliée par une constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ indépendante de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, avec $\alpha, \beta \in [1, +\infty]$.

Exercice 2.

Soient $f, g \in C^0([0, 1])$ (autrement dit, deux fonctions continues sur $[0, 1]$). On définit

$$\phi(f, g) = \int_0^1 fg \tag{2.1}$$

1) Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $C^0([0, 1])$.
2) Montrer que $|\phi(f, g)| \leqslant \phi(f, f)^{1/2} \phi(g, g)^{1/2}$ en suivant la démonstration de l'inégalité de Cauchy–Schwarz donnée au cours.

Solution

1) Pour $f, g \in C^0([0, 1])$, nous avons

$$\phi(f, f) \geqslant 0; \tag{2.2}$$

$$\phi(f, \cdot) \text{ et } \phi(\cdot, g) \text{ sont linéaires}; \tag{2.3}$$

$$\phi(f, g) = \phi(g, f). \tag{2.4}$$

Soit $f \in C^0([0, 1])$ telle que $\phi(f, f) = 0$. Il reste à prouver que $f = 0$; procédons par contradiction. Supposons $\exists a \in [0, 1], f(a) \neq 0$. Puisque $f^2 \in C^0[0, 1]$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f^2 est strictement positive sur $V(a,\delta)$ avec $V(a,\delta) = [a-\delta, a+\delta] \cap [0,1]$. Par conséquent, comme $f^2 \geqslant 0$ sur $[0,1]$, on a $\int_{V(a,\delta)} f^2 > 0$ et $\int_{[0,1]\setminus V(a,\delta)} f^2 \geqslant 0$. Nous obtenons,

$$\phi(f,f) = \int_0^1 f^2 = \int_{[0,1]\setminus V(a,\delta)} f^2 + \int_{V(a,\delta)} f^2 > 0, \tag{2.5}$$

ce qui est une contradiction.

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\phi(\alpha f + g, \alpha f + g) = \alpha^2 \phi(f,f) + 2\alpha\phi(f,g) + \phi(g,g) \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Nous avons donc un polynôme de degré au plus 2 ayant au maximum une racine. Cela signifie que son discriminant est négatif, i.e.

$$\phi(f,g)^2 - \phi(f,f)\phi(g,g) \leqslant 0, \tag{2.7}$$

d'où l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Remarque. Cette preuve nécessite uniquement les points (2.2), (2.3) et (2.4). La propriété « $\phi(f,f) = 0 \implies f = 0$ » n'est pas utilisée.

Exercice 3.

1) Soit un espace métrique (M,d) et une fonction continue $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. On suppose que : (I) $h(0) = 0$; (II) h est dérivable sur $]0,+\infty[$; (III) $h' > 0$ sur $]0,+\infty[$; et (IV) h' est décroissante sur $]0,+\infty[$. Prouver que $\tilde{d} = h \circ d$ est aussi une distance sur M.
2) Si $V \neq \{0\}$ est un espace vectoriel équipé d'une norme N, d est la distance induite par N et $h(x) = x/(1+x)$ pour $x \geqslant 0$, prouver que $\tilde{d} = h \circ d$ est une distance, mais qu'elle n'est induite par aucune norme.

Solution

1) Soit $(a,b,c) \in M^3$.

Symétrie : $\tilde{d}(a,b) = \tilde{d}(b,a)$ car d est symétrique.

Positivité : $\tilde{d}(a,b) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $a = b$. En effet, ceci découle de la positivité de d et du fait que $h(x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Inégalité triangulaire : on montre d'abord que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $h(x+y) \leqslant h(x) + h(y)$.

Si $x = 0$ ou $y = 0$, elle est évidente. Supposons donc $x > 0$, $y > 0$ et (sans perte de généralité) $y \leqslant x$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $u \in]0,y[$ et $v \in]x, x+y[$ tels que

$$\frac{h(y)}{y} = \frac{h(y) - h(0)}{y} = h'(u), \qquad \frac{h(x+y) - h(x)}{y} = h'(v). \tag{3.1}$$

Comme $u < v$, et h' est décroissante,

$$h(x+y) = h(x) + h'(v)y \leqslant h(x) + h'(u)y = h(x) + h(y). \tag{3.2}$$

Autre manière de montrer cette inégalité : comme h est concave sur $]0,\infty[$ et donc sur $[0,\infty[$ (car continue en 0), on a pour tout $z \geqslant 0$ et tout $t \in [0,1]$, $h(tz) = h((1-t)0+tz) \geqslant (1-t)h(0)+th(z) = th(z)$. En particulier, si $x+y>0$,

$$h\left(\frac{x}{x+y}(x+y)\right) \geqslant \frac{x}{x+y}h(x+y) \quad \text{et} \quad h\left(\frac{y}{x+y}(x+y)\right) \geqslant \frac{y}{x+y}h(x+y).$$

En sommant, on a bien $h(x)+h(y) \geqslant h(x+y)$. Le résultat final découle de l'inégalité triangulaire pour d :

$$\tilde{d}(a,b) = h(d(a,b)) \leqslant h(d(a,c)+d(c,b)) \tag{3.3}$$

$$\leqslant h(d(a,c)) + h(d(c,b)) = \tilde{d}(a,c) + \tilde{d}(c,b). \tag{3.4}$$

2) La fonction h, définie par $h(x) := x/(1+x)$ pour $x \geqslant 0$, est bien continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $h(0)=0$, $h'(x) = 1/(1+x)^2 > 0$ sur $]0,+\infty[$, et h' est décroissante sur $]0,+\infty[$. D'après le point 1, $\tilde{d} = h \circ d$ est une distance sur V. Supposons qu'elle soit induite par une norme $\tilde{N}$. Alors, pour tout $z \in V$ tel que $N(z)=1$ et tout $\lambda > 0$,

$$\lambda \tilde{N}(z) = \tilde{N}(\lambda z) = \tilde{d}(\lambda z, 0) = h(d(\lambda z, 0)) = h(N(\lambda z)) = h(\lambda N(z)) = \frac{\lambda}{1+\lambda}. \tag{3.5}$$

Ce résultat est absurde, puisque le membre de gauche est linéaire en λ mais pas celui de droite. On en conclut que $\tilde{d}$ n'est induite par aucune norme.