Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-04-14 au 2025-04-18

Série 18 du mercredi 16 avril 2025

Exercice 1.

Montrer l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{R}(E)^2, \quad \left| \int_E fg \right| \leqslant \left(\int_E f^2 \right)^{1/2} \left(\int_E g^2 \right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

où $E \subset \mathbb{R}^n$ borné.

Solution

D'un résultat du cours, $f, g \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow fg \in \mathcal{R}(E)$. Choisissons un pavé $R \supset E$ et $\tilde{f}, \tilde{g} : R \to \mathbb{R}$ les prolongements de f et g par zéro en dehors de E. Il est clair que $\tilde{f}^2$, $\tilde{f}\tilde{g}$, $\tilde{g}^2$ sont respectivement les prolongements de f^2, fg, g^2 par zéro en dehors de E.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_R \left(\tilde{f} + \lambda \tilde{g} \right)^2 &= \int_R \left(\tilde{f}^2 + \lambda^2 \tilde{g}^2 + 2\lambda \tilde{f}\tilde{g} \right) \\ &= \int_R \tilde{f}^2 + \lambda^2 \int_R \tilde{g}^2 + 2\lambda \int_R \tilde{f}\tilde{g} \\ &= \int_E f^2 + \lambda^2 \int_E g^2 + 2\lambda \int_E fg =: p(\lambda). \end{aligned}$$

Puisque $p \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, son discriminant $\left(2 \int_E fg \right)^2 - 4 \int_E g^2 \int_E f^2$ est $\leqslant 0$, d'où l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Exercice 2.

Pour tout pavé R de $\mathbb{R}^n$, nous notons ∂R son bord et $\operatorname{Vol} R$ son volume. Considérons une famille de pavés de $\mathbb{R}^n$: $\{R_j \subset \mathbb{R}^n : j \in \mathbb{N}\}$; notons $A := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \partial R_j$.

Montrer que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe une collection de pavés $\{C_k \subset \mathbb{R}^n : k \in \mathbb{N}\}$ telle que $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Vol} C_k < \epsilon$.

Solution

Puisque les pavés dégénérés sont admis dans ce cours, proposons d'abord un raisonnement qui en fait usage. Soient $a_1 \leqslant b_1$, ..., $a_n \leqslant b_n$ dans $\mathbb{R}$. Considérons le pavé $Q := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$. Le bord de Q peut s'écrire comme une union finie de $2n$ pavés de volume nul :

$$\partial Q = \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} \bigcup_{c \in \{a_i, b_i\}} \left(\left(\prod_{j \in [\![1,i-1]\!]} [a_j, b_j] \right) \times \{c\} \times \left(\prod_{j \in [\![i+1,n]\!]} [a_j, b_j] \right) \right), \tag{2.1}$$

où on a noté $[\![1,n]\!] = [1,n] \cap \mathbb{Z}$. Par ce raisonnement, A est l'union dénombrable de pavés de volume nul : $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$, où chaque B_k est un pavé de volume nul.

Alternativement, raisonnons avec des pavés non dégénérés, mais à partir des pavés B_k déjà obtenus. Soit $\epsilon \in \,]0,+\infty[$: on peut choisir pour chaque $k \in \mathbb{N}$ un pavé non dégénéré $C_k \supset B_k$ tel que $\operatorname{Vol} C_k < 2^{-k-1}\epsilon$. Ainsi, $A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Vol} C_k < \epsilon$.

Exercice 3.

Soient $R \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un pavé et $f : R \to \mathbb{R}$. Supposons que f est bornée et intégrable au sens de Riemann. Montrer que $\mathcal{G}(f) \coloneqq \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \in R\}$ est un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$.

Solution

Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est intégrable au sens de Riemann, il existe une partition $\mathcal{P}$ de R telle que

$$\sum_{Q\in\mathcal{P}} (\operatorname{Vol} Q) \sup_Q f - \sum_{Q\in\mathcal{P}} (\operatorname{Vol} Q) \inf_Q f < \epsilon. \tag{3.1}$$

D'où

$$\sum_{Q\in\mathcal{P}} \operatorname{Vol}\left(Q \times \left[\inf_Q f, \sup_Q f\right]\right) < \epsilon \tag{3.2}$$

avec

$$\bigcup_{Q\in\mathcal{P}} \left(Q \times \left[\inf_Q f, \sup_Q f\right]\right) \supset \mathcal{G}(f). \tag{3.3}$$

Ainsi, pour tout $\epsilon \in \,]0,+\infty[$, on peut trouver une famille finie de pavés dont l'union contient $\mathcal{G}(f)$ et dont la somme des volumes est strictement inférieure à ϵ : $\mathcal{G}(f)$ est donc négligeable.

Exercice 4.

1) Montrer que l'union d'une famille finie d'ensembles négligeables est négligeable.
2) L'union d'une famille infinie dénombrable d'ensembles négligeables est-elle négligeable ?

Solution

1) Soit une famille finie de sous-ensembles négligeables de $\mathbb{R}^n$: $\{E_\kappa : \kappa \in [\![1,p]\!]\}$; notons E leur union.

   Soient $\epsilon \in \,]0,+\infty[$ et $\kappa \in [\![1,p]\!]$. Comme E_κ est négligeable, on peut choisir un entier $N_\kappa \in \mathbb{N}^*$ et une famille de pavés $\{R_i^\kappa \subset \mathbb{R}^n : i \in [\![1,N_\kappa]\!]\}$ telle que

$$\bigcup_{i=1}^{N_\kappa} R_i^\kappa \supset E_\kappa \tag{4.1}$$

   et

$$\sum_{i=1}^{N_\kappa} \operatorname{Vol} R_i^\kappa < \frac{\epsilon}{p}. \tag{4.2}$$

Il en résulte que

$$\bigcup_{\kappa=1}^{p} \bigcup_{i=1}^{N_\kappa} R_i^\kappa \supset E \tag{4.3}$$

avec

$$\sum_{\kappa=1}^{p} \sum_{i=1}^{N_\kappa} \operatorname{Vol} R_i^\kappa < \sum_{\kappa=1}^{p} \frac{\epsilon}{p} = \epsilon. \tag{4.4}$$

Puisque ce raisonnement est valable pour tout $\epsilon \in]0, +\infty[$, E est bien négligeable.

2) La réponse à la question est « non ». Prenons par exemple l'ensemble $E := \mathbb{Q}^2 \cap [0, 1]^2$. Sa fonction indicatrice n'est pas intégrable au sens de Riemann sur le pavé $[0, 1]^2$. Ainsi E n'est pas mesurable au sens de Jordan et donc n'est pas négligeable. Toutefois E est une union dénombrable d'ensembles négligeables car pour tout $(a, b) \in \mathbb{Q}^2 \cap [0, 1]^2$, l'ensemble $\{(a, b)\} = [a, a] \times [b, b]$ est un pavé dégénéré, donc négligeable.