

Série 18 du mercredi 16 avril 2025

Exercice 1.

Montrer l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{R}(E)^2, \quad \left|\int_E fg\right| \leqslant \left(\int_E f^2\right)^{1/2} \left(\int_E g^2\right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

où $E \subset \mathbb{R}^n$ borné.

Exercice 2.

Pour tout pavé R de $\mathbb{R}^n$, nous notons ∂R son bord et $\operatorname{Vol} R$ son volume. Considérons une famille de pavés de $\mathbb{R}^n$: $\{R_j \subset \mathbb{R}^n : j \in \mathbb{N}\}$; notons $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \partial R_j$.

Montrer que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe une collection de pavés $\{C_k \subset \mathbb{R}^n : k \in \mathbb{N}\}$ telle que $A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Vol} C_k < \epsilon$.

Exercice 3.

Soient $R \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un pavé et $f : R \to \mathbb{R}$. Supposons que f est bornée et intégrable au sens de Riemann. Montrer que $\mathcal{G}(f) := \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \in R\}$ est un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4.

1) Montrer que l'union d'une famille finie d'ensembles négligeables est négligeable.
2) L'union d'une famille infinie dénombrable d'ensembles négligeables est-elle négligeable ?