Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-04-14 au 2025-04-18

# Série 17 du lundi 14 avril 2025

## Exercice 1.

Déterminer les extremums absolus (ou "globaux") de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y, \quad$ où $D = \{(x,y) : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 3\}$
2) $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y, \quad$ où $D = \{(x,y) : y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 32\}$

   *Indication :* Etudier séparément $\mathring{D}$ et $\partial D$. Pour les parties du bord, introduire des multiplicateurs de Lagrange, si nécessaire.

### Solution

Ces deux fonctions étant continues sur leurs domaines de définition compacts, elles admettent chacune des points de maximum et de minimum absolus.

1) Comme $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathring{D}$ (l'intérieur de $D$), ses points d'extremums absolus se trouvent soit en un point stationnaire dans l'intérieur de $D$, soit sur le bord de $D$.

   Points stationnaires dans l'intérieur de $D$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ \ 2x - y - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x,y) = (1,1) \in \mathring{D}.$$

   La matrice hessienne de $f$ au point $(1,1)$ est

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

   dont le déterminant vaut 3 et la trace vaut 4. Cette matrice symétrique admet ainsi deux valeurs propres strictement positives. Le point $(1,1)$ est donc un point de minimum local strict de $f$. De plus on a $f(1,1) = -1$.

   Sur le bord de $D$ on a :
   Notons d'abord que le bord de $D$ est l'union des trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ :

$$\{(x,0) : 0 \leqslant x \leqslant 3\} \cup \{(0,y) : 0 \leqslant y \leqslant 3\} \cup \{(x, 3-x) : 0 \leqslant x \leqslant 3\}.$$

   L'évaluation de la fonction $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$ sur le bord donne

$$f(x,0) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3,$$

$$f(0,y) = y^2 - y = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 3,$$

$$f(x, 3-x) = 3(x^2 - 3x + 2) = 3\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right], \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3.$$

L'idée est maintenant de chercher les extrema de ces fonctions unidimensionnelles dans l'intervalle précisé, qui se trouvent soit aux points stationnaires (et points intérieurs) soit aux extrémités de l'intervalle (cf. Analyse I). Utilisons d'abord la notation $g(x) = f(x, 0)$ . Alors $g'(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ . Puisque $g''(x) = 2 > 0$ , $g$ a un minimum local en $x = \frac{1}{2}$. De plus on a $g(0) = 0$ et $g(3) = 6$ . On a donc

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 3} f(x, 0) = f(3, 0) = 6 \qquad \text{et} \qquad \min_{0 \leqslant x \leqslant 3} f(x, 0) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

De même, on cherche les extrema des fonctions $h(y) = f(0, y)$ et $k(x) = f(x, 3-x)$. La fonction $h$ a exactement le même comportement que $g$ et pour $k$ on a

$$k'(x) = 6\left(x - \tfrac{3}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{3}{2}, \qquad k\left(\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{3}{4},$$
$$k''(x) = 6 > 0 \quad (\Rightarrow \text{ minimum local}), \qquad k(0) = k(3) = 6,$$

si bien qu'on obtient

$$\max_{0 \leqslant y \leqslant 3} f(0, y) = f(0, 3) = 6\,, \qquad \min_{0 \leqslant y \leqslant 3} f(0, y) = f\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{4}\,,$$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 3} f(x, 3-x) = f(3, 0) = f(0, 3) = 6\,, \qquad \min_{0 \leqslant x \leqslant 3} f(x, 3-x) = f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{3}{4}\,.$$

Il s'en suit que $f$ admet un minimum absolu en $(1, 1)$ de valeur $f(1, 1) = -1$ et des maxima absolus en $(3, 0)$ et en $(0, 3)$ de valeur $f(3, 0) = f(0, 3) = 6$, voir Fig. 1.

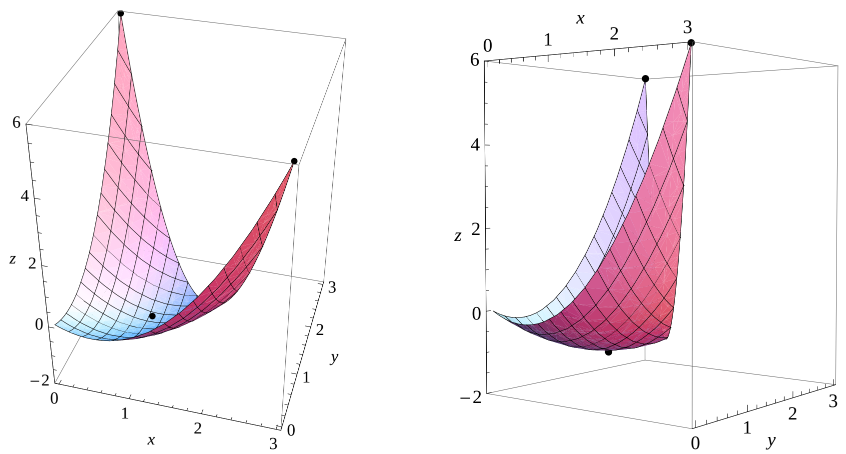


FIGURE 1

2) Comme $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathring{D}$ (l'intérieur de $D$), ses points d'extrema absolu se trouvent soit en un point stationnaire dans l'intérieur de $D$, soit sur le bord de $D$.

Points stationnaires dans l'intérieur de $D$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x - y - 6 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x + 4y - 6 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x, y) = (2, 2) \in \mathring{D}.$$

La matrice hessienne de $f$ au point $(2,2)$ est

$$H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant vaut 15 et la trace vaut 8. Cette matrice symétrique admet ainsi deux valeurs propres strictement positives. Le point $(2,2)$ est donc un point de minimum local strict de $f$. De plus on a $f(2,2) = -12$.

<u>Sur le bord de $D$ on a :</u>
Le bord de $D$ est l'union d'un segment de l'axe des $x$ et d'un arc de cercle. Sur la première partie du bord (le segment de l'axe $x$), l'évaluation de la fonction $f$ donne

$$f(x,0) = 2x^2 - 6x = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}, \qquad -4\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4\sqrt{2}.$$

La fonction $x \to f(x,0)$ atteint son minimum en $x = \frac{3}{2}$ où $f\left(\frac{3}{2},0\right) = -\frac{9}{2}$ et son maximum en $x = -4\sqrt{2}$ où $f(-4\sqrt{2},0) = 8(8+3\sqrt{2})$. L'autre extrémité $x = 4\sqrt{2}$ ne donne pas un candidat pour un extremum global de $f$ parce que $f(\frac{3}{2},0) < f(4\sqrt{2},0) < f(-4\sqrt{2},0)$.
Pour la deuxième partie (le demi-cercle), appliquons la méthode des multiplicateurs de Lagrange à la contrainte $g(x,y) := x^2 + y^2 - 32 = 0$ avec $x \in ]-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}[$ et $y > 0$ ; ceci est permis car $\nabla g$ ne s'annule pas sur cette contrainte. Il s'agit donc de trouver $x \in ]-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}[$, $y > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - y - 6 = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \lambda 2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 4y - 6 = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \lambda 2y,$$

$$x^2 + y^2 - 32 = 0.$$

En multipliant les deux membres de la première équation par $y$ et ceux de la deuxième par $x$, on obtient $4xy - y^2 - 6y = -x^2 + 4xy - 6x$, et donc $0 = x^2 - y^2 + 6x - 6y = (x-y)(x+y+6)$. Si $x = y$, on déduit de $x^2 + y^2 - 32 = 0$ que $x = y = 4$ et il existe aussi une valeur de $\lambda$ correspondante. De plus la relation $x + y = -6$ avec $y > 0$ est impossible :

$$0 = (-6-y)^2 + y^2 - 32 = 2y^2 + 12y + 4 = 2(y^2 + 6y + 2) \Rightarrow y = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 8}}{2} < 0.$$

Le seul point à considérer sur cette partie de la contrainte est donc $(4,4)$, où $f(4,4) = 0$. Il faut encore considérer les deux points aux extrémités de l'arc de cercle : $(-4\sqrt{2},0)$ et $(4\sqrt{2},0)$, mais le point $(4\sqrt{2},0)$ a déjà été éliminé.
Ainsi le minimum global de $f$ est atteint en $(2,2)$ et vaut $f(2,2) = -12$ et le maximum global est atteint en $(-4\sqrt{2},0)$ et vaut $f(-4\sqrt{2},0) = 8(8+3\sqrt{2})$.

## Exercice 2.

Notons $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Définissons $f_1, f_2, f_3 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ par

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}^2, x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.1}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}^2, x = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.2}$$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}^2, x = y, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.3}$$

Dire si les fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_3$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[0,1]^2$.

## Solution

1) La fonction $f_1$ n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]^2$. En effet tout pavé de « volume » (« aire » serait plus naturel ici) strictement positif et inclus dans $[0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$ rencontre à la fois $[0, \frac{1}{2}] \times [0,1] \setminus \mathbb{Q}^2$ et $\mathbb{Q}^2$, et donc la borne inférieure (respectivement supérieure) de $f_1$ sur un tel pavé vaut 0 (respectivement 1). Par conséquent, les intégrales de Riemann inférieure et supérieure de $f_1$ sur $[0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$ valent respectivement 0 et 1, deux valeurs distinctes : $f_1$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.
2) La fonction $f_2$ est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]^2$. Nous voulons utiliser le Lemme 8.10 de le Polycopie. En effet, pour tout $\epsilon > 0$ nous pouvons construire une partition $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[0,1]^2$ comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\varepsilon :=& \{[0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}] \times [0,1], [\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{3}] \times [0,1], [\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{3}, 1] \times [0,1]\}, \qquad & \varepsilon < 1 \\ :=& \{[0, \frac{1}{2}] \times [0,1], [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]\}, & \varepsilon \geqslant 1 \end{aligned}$$

On y a $\overline{S}(f_2, \mathcal{P}_\varepsilon) - \underline{S}(f_2, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$ et donc $f_2$ est Riemann-intégrable.
3) La fonction $f_3$ est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]^2$. Nous utilisons de nouveau le Lemme 8.10 de la polycopie pour faire la démonstration. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, posons $N_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, un entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$. On peut alors construire une partition $\mathcal{P}_\varepsilon$ de $[0,1]^2$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\varepsilon :=& \{[0, \frac{1}{N_\varepsilon}] \times [0, \frac{1}{N_\varepsilon}],\ [\frac{1}{N_\varepsilon}, \frac{2}{N_\varepsilon}] \times [0, \frac{1}{N_\varepsilon}],\ \dots,\ [\frac{N_\varepsilon - 1}{N_\varepsilon}, 1] \times [0, \frac{1}{N_\varepsilon}], \\ & [0, \frac{1}{N_\varepsilon}] \times [\frac{1}{N_\varepsilon}, \frac{2}{N_\varepsilon}],\ [\frac{1}{N_\varepsilon}, \frac{2}{N_\varepsilon}] \times [\frac{1}{N_\varepsilon}, \frac{2}{N_\varepsilon}],\ \dots,\ [\frac{N_\varepsilon - 1}{N_\varepsilon}, 1] \times [\frac{1}{N_\varepsilon}, \frac{2}{N_\varepsilon}], \dots \\ & \dots, [0, \frac{1}{N_\varepsilon}] \times [\frac{N_\varepsilon - 1}{N_\varepsilon}, 1],\ [\frac{1}{N_\varepsilon}, \frac{2}{N_\varepsilon}] \times [\frac{N_\varepsilon - 1}{N_\varepsilon}, 1],\ \dots,\ [\frac{N_\varepsilon - 1}{N_\varepsilon}, 1] \times [\frac{N_\varepsilon - 1}{N_\varepsilon}, 1]\}, \qquad \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

On y a $\overline{S}(f_3, \mathcal{P}_\varepsilon) - \underline{S}(f_3, \mathcal{P}_\varepsilon) \leqslant N_\varepsilon \frac{1}{N_\varepsilon^2} = \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ et donc $f_3$ est Riemann-intégrable.

## Exercice 3.

Notons $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Définissons $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{i^{-1} : i \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1}$$

1) $f$ est-elle intégrable au sens de Riemann ?
2) Si oui, calculer $\int_{[0,1]^2} f$.

### Solution

$f$ est effectivement intégrable au sens de Riemann et son intégrale est nulle. Comme $f$ est positive sur $[0,1]^2$, les intégrales de Riemann inférieure et supérieure sont positives. Il suffit alors de prouver que l'intégrale de Riemann supérieure est nulle.

Soit $\epsilon \in ]0,1[$. Montrons qu'il existe un entier $K \geqslant 1$ et des pavés $(R_i)_{i=1}^K$ dont l'union vaut $[0,1]^2$, dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, et tels que $\sum_{j=1}^K \left(\sup_{R_j} f\right) \operatorname{Vol} R_j \leqslant \epsilon$. Ceci prouvera que l'intégrale de Riemann supérieure est nulle, ce qui terminera la solution.

Choisissons un entier $K$ tel que $K \geqslant 1+8\epsilon^{-2}$. Posons $R_K := [0, \epsilon/2] \times [0,1]$ et, $\forall j \in [\![1, K-1]\!] = [1, K-1] \cap \mathbb{Z}$,

$$R_j := \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{(1-\frac{\epsilon}{2})(j-1)}{K-1}, \frac{\epsilon}{2} + \frac{(1-\frac{\epsilon}{2})j}{K-1}\right] \times [0,1]. \tag{3.2}$$

Alors $\operatorname{Vol} R_K = \epsilon/2$ et, $\forall j \in [\![1, K-1]\!]$, $\operatorname{Vol} R_j = \frac{1-\epsilon/2}{K-1}$. Le nombre d'entiers $i \geqslant 1$ qui satisfont $i^{-1} \in [\epsilon/2, 1]$ (i.e. $i \leqslant 2/\epsilon$) est un nombre inférieur à $2/\epsilon$. De plus, pour tout entier $i \geqslant 1$, $i^{-1}$ appartient à au plus deux éléments de $\{R_j : j \in [\![1, K-1]\!]\}$. Ainsi le nombre d'éléments de $\{R_j : j \in [\![1, K-1]\!]\}$ contenant un élément de $\{i^{-1} \in [\epsilon/2, 1] : i \in \mathbb{N}^*\}$ est inférieur à $4/\epsilon$. D'où

$$\sum_{j=1}^{K} \left(\sup_{R_j} f\right) \operatorname{Vol} R_j = \frac{\epsilon}{2} + \frac{1-\frac{\epsilon}{2}}{K-1} \sum_{j=1}^{K-1} \left(\sup_{R_j} f\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{1-\frac{\epsilon}{2}}{K-1}\frac{4}{\epsilon} \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{K-1}\frac{4}{\epsilon} \leqslant \epsilon \tag{3.3}$$

car $K \geqslant 1 + 8\epsilon^{-2}$. Ceci conclut la preuve.

## Exercice 4.

Soit $R$ un pavé de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathcal{R}(R)$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui sont intégrables au sens de Riemann sur $R$.

1) Soient $f, g \in \mathcal{R}(R)$ telles que, $\forall x \in R$, $f(x) \leqslant g(x)$. Montrer que $\int_R f \leqslant \int_R g$.
2) Montrer que $\mathcal{R}(R)$ est un espace vectoriel et que

$$\forall (f, g, \lambda) \in \mathcal{R}(R) \times \mathcal{R}(R) \times \mathbb{R}, \qquad \int_R (\lambda f + g) = \lambda \int_R f + \int_R g. \tag{4.1}$$

### Solution

Nous utilisons les notations $\overline{S}$ et $\underline{S}$ pour les sommes de Darboux supérieure et inférieure.

1) Immédiatement :

$$\int_R f = \inf\{\overline{S}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partition de } R\} \leqslant \inf\{\overline{S}(g,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partition de } R\} = \int_R g. \tag{4.2}$$

2) Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $f, g \in \mathcal{R}(R)$, il existe une partition $\mathcal{P}$ de $R$ telle que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) < \epsilon \qquad \text{et} \qquad \overline{S}(g,\mathcal{P}) - \underline{S}(g,\mathcal{P}) < \epsilon. \tag{4.3}$$

Si $\lambda \geqslant 0$,

$$\lambda\underline{S}(f,\mathcal{P}) + \underline{S}(g,\mathcal{P}) \leqslant \underline{S}(\lambda f + g,\mathcal{P}) \leqslant \overline{S}(\lambda f + g,\mathcal{P}) \leqslant \lambda\overline{S}(f,\mathcal{P}) + \overline{S}(g,\mathcal{P}) \tag{4.4}$$

et donc

$$\overline{S}(\lambda f + g,\mathcal{P}) - \underline{S}(\lambda f + g,\mathcal{P}) < \lambda\epsilon + \epsilon \tag{4.5}$$

Si $\lambda \leqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\lambda\overline{S}(f,\mathcal{P}) + \underline{S}(g,\mathcal{P}) = -\lambda\underline{S}(-f,\mathcal{P}) + \underline{S}(g,\mathcal{P}) &\leqslant \underline{S}(-\lambda(-f) + g,\mathcal{P}) && (4.6)\\
&= \underline{S}(\lambda f + g,\mathcal{P}) && (4.7)\\
&\leqslant \overline{S}(\lambda f + g,\mathcal{P}) && (4.8)\\
&= \overline{S}(-\lambda(-f) + g,\mathcal{P}) && (4.9)\\
&\leqslant -\lambda\overline{S}(-f,\mathcal{P}) + \overline{S}(g,\mathcal{P}) && (4.10)\\
&= \lambda\underline{S}(f,\mathcal{P}) + \overline{S}(g,\mathcal{P}) && (4.11)
\end{aligned}$$

et donc

$$\overline{S}(\lambda f + g,\mathcal{P}) - \underline{S}(\lambda f + g,\mathcal{P}) < |\lambda|\epsilon + \epsilon. \tag{4.12}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'arbitrarité de $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donne que $\lambda f + g$ est intégrable au sens de Riemann sur le pavé $R$.
Revenons à $\epsilon > 0$ comme ci-dessus. Pour $\lambda \geqslant 0$, on en déduit que $\int_R(\lambda f + g)$ et $\lambda\int_R f + \int_R g$ sont dans l'intervalle $\left[\lambda\underline{S}(f,\mathcal{P}) + \underline{S}(g,\mathcal{P}), \lambda\overline{S}(f,\mathcal{P}) + \overline{S}(g,\mathcal{P})\right]$ ; la longueur de cet intervalle est strictement inférieure à $\lambda\epsilon + \epsilon$. Ainsi

$$\left|\int_R(\lambda f + g) - \lambda\int_R f - \int_R g\right| < \lambda\epsilon + \epsilon. \tag{4.13}$$

Pour $\lambda \leqslant 0$, on obtient de même que $\int_R(\lambda f + g)$ et $\lambda\int_R f + \int_R g$ sont dans l'intervalle $\left[\lambda\overline{S}(f,\mathcal{P}) + \underline{S}(g,\mathcal{P}), \lambda\underline{S}(f,\mathcal{P}) + \overline{S}(g,\mathcal{P})\right]$ ; la longueur de cet intervalle est strictement inférieure à $|\lambda|\epsilon + \epsilon$. Ainsi

$$\left|\int_R(\lambda f + g) - \lambda\int_R f - \int_R g\right| < |\lambda|\epsilon + \epsilon \tag{4.14}$$

L'arbitrarité de $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donne $\int_R(\lambda f + g) = \lambda\int_R f + \int_R g$.