Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-04-14 au 2025-04-18

Série 17 du lundi 14 avril 2025

Exercice 1.

Déterminer les extremums absolus (ou "globaux") de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$, où $D = \{(x,y) : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 3\}$
2) $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 6x - 6y$, où $D = \{(x,y) : y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 32\}$
Indication : Etudier séparément $\mathring{D}$ et ∂D. Pour les parties du bord, introduire des multiplicateurs de Lagrange, si nécessaire.

Exercice 2.

Notons $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Définissons $f_1, f_2, f_3 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ par

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}^2, x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.1}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}^2, x = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.2}$$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}^2, x = y, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.3}$$

Dire si les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont intégrables au sens de Riemann sur $[0,1]^2$.

Exercice 3.

Notons $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Définissons $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left\{i^{-1} : i \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ et } y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1}$$

1) f est-elle intégrable au sens de Riemann ?
2) Si oui, calculer $\int_{[0,1]^2} f$.

Exercice 4.

Soit R un pavé de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathcal{R}(R)$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui sont intégrables au sens de Riemann sur R.

1) Soient $f, g \in \mathcal{R}(R)$ telles que, $\forall x \in R$, $f(x) \leqslant g(x)$. Montrer que $\int_R f \leqslant \int_R g$.
2) Montrer que $\mathcal{R}(R)$ est un espace vectoriel et que

$$\forall (f, g, \lambda) \in \mathcal{R}(R) \times \mathcal{R}(R) \times \mathbb{R}, \quad \int_R (\lambda f + g) = \lambda \int_R f + \int_R g. \tag{4.1}$$