Série 16 du mercredi 9 avril 2025

Exercice 1.

Considérons la fonction f définie pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{1.1}$$

et l'ensemble

$$S := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}. \tag{1.2}$$

1) Montrer que f atteint un minimum global sur S.
2) Calculer ce minimum par une méthode géométrique.

Exercice 2.

Parmi tous les triangles rectangles ayant la même aire, déterminer celui qui a la plus petite hypoténuse.

Exercice 3.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

1) Calculer

$$\min\{\|\boldsymbol{x}\|^2 : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\ ,\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \tag{3.1}$$

par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.
2) Vérifier le résultat en exprimant x_1 et x_2 comme des fonctions de x_3 qui satisfont les deux contraintes.

Exercice 4.

1) Soient $q \in \mathbb{R}_+^*$ et $\boldsymbol{x} \in \,]0, +\infty[^n$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = q^n \implies \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geqslant (1 + q)^n. \tag{4.1}$$

Sous quelles conditions a-t-on égalité, i.e. $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = (1 + q)^n$?

2) Soient $x_0, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_0 < x_{n+1}$. Trouver, s'ils existent, les points $\boldsymbol{x} \coloneqq (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ en lesquels

$$\sup\left\{ \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=0}^n (x_i + x_{i+1})} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \; ; \; \forall i \in \{0, \dots, n\}, \; x_i < x_{i+1} \right\} \tag{4.2}$$

est atteint.

Indication. Utiliser le résultat du point 1.