Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-04-07 au 2025-04-11

Série 16 du mercredi 9 avril 2025

Exercice 1.

Considérons la fonction f définie pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{1.1}$$

et l'ensemble

$$S := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}. \tag{1.2}$$

1) Montrer que f atteint un minimum global sur S.
2) Calculer ce minimum par une méthode géométrique.

Solution

1) f prend des valeurs supérieures ou égales à 1 sur $\mathrm{B}(\mathbf{0},1)^{\complement}$, et donc a fortiori sur $D := S \cap \mathrm{B}(\mathbf{0},1)^{\complement}$. D'autre part le point $(0, 0.5, 0) \in \mathrm{B}(\mathbf{0},1)$ appartient au plan S et $f(0, 0.5, 0) = 0.5$. La restriction de la fonction continue f au compact non vide $S \cap \overline{\mathrm{B}}(\mathbf{0},1)$ y atteint son minimum, qui est ainsi aussi le minimum de f sur tout S.
2) Tout ensemble de niveau de f intersecté avec S est l'intersection d'une sphère centrée en $\mathbf{0}$ et de S. C'est donc soit : (I) l'ensemble vide, (II) un singleton, ou (III) un cercle. L'ensemble de niveau constitué d'un seul point correspondra à la valeur de f minimale. En faisant varier depuis 0 le rayon R de la sphère, on remarque que
   - pour R petit, la sphère ne touche pas le plan ;
   - pour R grand, la sphère intersecte ce plan en un cercle.

   La solution cherchée sera pour la valeur de R telle que la sphère touche le plan en un seul point. Elle est alors tangente au plan S et à ce point, les deux normales sont colinéaires.

   Un vecteur normal (non-unitaire) au plan est $(1, 2, 1)$; un vecteur normal (non-unitaire) à la sphère au point (x, y, z) est (x, y, z). On recherche donc $(x, y, z) \in S$ tel que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) = (\alpha, 2\alpha, \alpha)$; le minimum de f sera alors atteint en ce point. Autrement dit, il s'agit de trouver $(\alpha, 2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha + 4\alpha + \alpha = 1$, soit $\alpha = 1/6$. Le point $(1/6, 1/3, 1/6)$ est le point du plan S à distance minimale de l'origine. Le minimum de f sur S est donc $\sqrt{1/36 + 1/9 + 1/36} = 1/\sqrt{6}$.

Remarque. On remarque donc que le point qui réalise le minimum de la fonction sous contrainte du plan S correspond à un point où le gradient de f et le gradient de la contrainte « $x + 2y + z - 1 = 0$ » sont colinéaires.

Exercice 2.

Parmi tous les triangles rectangles ayant la même aire, déterminer celui qui a la plus petite hypoténuse.

Solution

Soit $A \in \,]0,+\infty[$ l'aire donnée. Un triangle rectangle dont les cathètes ont pour longueurs x et y a pour aire $xy/2$, et son hypothénuse est de longueur $\sqrt{x^2+y^2}$. Définissons alors deux fonctions $f, g : \,]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = xy - 2A. \tag{2.1}$$

Notons $E := \{(x,y) \in \,]0,+\infty[^2 : g(x,y) = 0\}$. Le problème posé revient ainsi à trouver l'infimum de f sur E, et en particulier à montrer que cet infimum est atteint.

Remarque. f donne en fait le carré de la longueur de l'hypoténuse. Comme $s \to s^2$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, résoudre le problème pour le carré de la longueur de l'hypoténuse est possible (avec l'économie d'une racine carrée). Notez que f est la distance à l'origine élevée au carré, et qu'un raisonnement géométrique est possible. Voir plus bas.

Pour commencer, montrons qu'un tel minimum existe. Comme E n'est pas borné, introduisons $D := [0, 2A+1] \times [0, 2A+1]$. Puisque f est continue sur le compact $E \cap D$, il existe $(a,b) \in E \cap D$ pour lequel on a

$$f(a,b) = \min_{E \cap D} f. \tag{2.2}$$

Montrons que $f(a,b)$ est aussi le minimum de f sur E. Pour tout $(x,y) \in E \setminus D$,

$$f(x,y) > (2A+1)^2 > 4A^2 + 1 = f(2A,1) \geqslant f(a,b). \tag{2.3}$$

La dernière inégalité de (2.3) découle de (2.2) car $(2A,1) \in E \cap D$. On en conclut

$$f(a,b) = \min_{E} f. \tag{2.4}$$

Calculons à présent ce minimum. Nous proposons deux méthodes alternatives.

Géométrie. Pour tous $(x,y) \in \,]0,+\infty[^2$, la contrainte $xy = 2A$ décrit une hyperbole symétrique par rapport à la première bissectrice (plus précisément, la branche de l'hyperbole dans le premier quadrant, celle dans le troisième quadrant n'intervenant pas dans la discussion). De la même manière, si on prend un cercle centré à l'origine et de rayon R croissant partant de 0, le cercle commence par ne pas rencontrer l'hyperbole et finit par la couper en deux points. La solution du problème correspond au rayon pour lequel le cercle est tangent à l'hyperbole. Ici, des considérations de symétrie donnent $x = y$, d'où $x = y = \sqrt{2A}$.
On remarque encore que le point qui réalise le minimum de la fonction sous contrainte correspond à un point où le gradient de f et le gradient de la contrainte « $xy - 2A = 0$ » sont colinéaires.

Multiplicateurs de Lagrange. Puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe une proportion $\lambda \in \mathbb{R}$ de sorte que $\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b)$. D'où :

$$\left.\begin{aligned} 2a &= \lambda b \\ 2b &= \lambda a \end{aligned}\right\} \implies 2(a+b) = \lambda(a+b), \tag{2.5}$$

ce qui entraîne, puisque $a, b > 0$, que $\lambda = 2$ et $a = b$. On vérifie trivialement que $a = b$ et $\lambda = 2$ est solution du système ci-dessus. Par conséquent, comme $ab - 2A = 0$, le triangle rectangle cherché n'est autre que le triangle rectangle isocèle dont la longueur de chaque cathète est $\sqrt{2A}$. La longueur de l'hypoténuse correspondante est

$$\sqrt{f(a,b)} = \sqrt{(\sqrt{2A})^2 + (\sqrt{2A})^2} = 2\sqrt{A}. \tag{2.6}$$

Exercice 3.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

1) Calculer

$$\min\{\|\boldsymbol{x}\|^2 : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \ , \ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \tag{3.1}$$

par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

2) Vérifier le résultat en exprimant x_1 et x_2 comme des fonctions de x_3 qui satisfont les deux contraintes.

Solution

1) Assurons-nous d'abord qu'il existe un point qui réalise le minimum. Notons

$$S \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0\}. \tag{3.2}$$

Le point $\boldsymbol{x}_0 \coloneqq (3/2, -1/2, 0, 0)$ satisfait les deux contraintes et $\|\boldsymbol{x}_0\| = \sqrt{5/2} < 2$. D'autre part, $\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 2$ pour tout $\boldsymbol{x} \in S \setminus \mathrm{B}(\boldsymbol{0}, 2)$. Comme la norme est une fonction continue, sa restriction au compact non vide $S \cap \overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{0}, 2)$ atteint son minimum. Il en résulte que

$$\min_{S \cap \overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{0},2)} \|\cdot\| = \min_S \|\cdot\|. \tag{3.3}$$

Puisque $S \cap \overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{0}, 2) \ni \boldsymbol{x}_0$, ce minimum est inférieur ou égal à $\|\boldsymbol{x}_0\| = \sqrt{5/2}$. Il en résulte que $\min_S \|\cdot\|^2$ est bien atteint et que ce minimum est inférieur ou égal à $5/2$. On construit la lagrangienne

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \\ - \lambda_2(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux multiplicateurs de Lagrange correspondant aux deux contraintes. Cherchons les points stationnaires de la lagrangienne. On a

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_4}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_4 = 0. \tag{3.10}$$

Des équations (3.7)–(3.10) on obtient

$$x_1 = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}, \qquad x_2 = \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}, \qquad x_3 = \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2, \qquad x_4 = 0. \tag{3.11}$$

Puis, en remplaçant les valeurs de (3.11) dans (3.5)–(3.6),

$$\begin{cases} \dfrac{3\lambda_1}{2} + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 2, \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{2}{7}, \\ \lambda_2 = \dfrac{4}{7}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Ainsi le point (3/7, −1/7, 5/7, 0, 2/7, 4/7) est le seul point stationnaire de la lagrangienne. Or on a prouvé que le minimum (3.1) existe, et on sait qu'il correspond à un point stationnaire de la lagrangienne. Par conséquent,

$$\min\{\|\boldsymbol{x}\|^2 : \boldsymbol{x} \in S\} = \left\|\left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, 0\right)\right\|^2 = \frac{5}{7}. \tag{3.13}$$

2) Partons des contraintes :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - 3x_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{x_3 - 1}{2}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Définissons alors $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$h(a, b) := \left(\frac{3 - 3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - 1}{2}\right)^2 + a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(7a^2 - 10a + 2b^2 + 5). \tag{3.15}$$

Pour tout $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$ on a donc $\|\boldsymbol{x}\|^2 = h(x_3, x_4)$, et

$$\nabla h(x_3, x_4) = (7x_3 - 5, 2x_4)^\top \ ; \tag{3.16}$$

en particulier,

$$\nabla h\left(\frac{5}{7}, 0\right) = \mathbf{0}. \tag{3.17}$$

Le point $(5/7, 0)$ est le seul point stationnaire de h. En tout point de $\mathbb{R}^2$, la matrice hessienne de h est $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$: elle est constante, symétrique, et définie positive. Comme $\forall (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2$,

$$h(x_3, x_4) \geqslant x_3^2 - 5x_3 + x_4^2 + \frac{5}{2} \geqslant \|(x_3, x_4)\|^2 - 5\|(x_3, x_4)\| + \frac{5}{2}, \tag{3.18}$$

on peut prouver que h atteint son minimum sur $\mathbb{R}^2$ de la même façon que dans la première partie. Il est donc nécessairement atteint en son seul point stationnaire : $(5/7, 0)$. Le point (3/7, −1/7, 5/7, 0) réalise donc le minimum : on a à nouveau prouvé (3.13).

Exercice 4.

1) Soient $q \in \mathbb{R}_+^*$ et $\boldsymbol{x} \in]0, +\infty[^n$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = q^n \implies \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geqslant (1 + q)^n. \tag{4.1}$$

Sous quelles conditions a-t-on égalité, i.e. $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = (1 + q)^n$?

2) Soient $x_0, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_0 < x_{n+1}$. Trouver, s'ils existent, les points $\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ en lesquels

$$\sup\left\{ \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\prod_{i=0}^{n}(x_i + x_{i+1})} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \forall i \in \{0, \dots, n\}, \ x_i < x_{i+1} \right\} \tag{4.2}$$

est atteint.

Indication. Utiliser le résultat du point 1.

Solution

1) On peut réécrire le problème comme un problème de minimisation sous contrainte $\min\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in]0, +\infty[^n,\ g(\boldsymbol{x}) = 0\}$ avec

$$f(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \tag{4.3}$$

et $g(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i - q^n$. On cherche alors à trouver

$$\min\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in]0, +\infty[^n, g(\boldsymbol{x}) = 0\} =: M, \tag{4.4}$$

en vérifiant en particulier que le minimun est bien atteint, et on veut montrer que $M \geqslant (1 + q)^n$. Soit $R \in]0, +\infty[$. Notons $K := [0, R]^n$ et $S := \{\boldsymbol{x} \in]0, +\infty[^n : \prod_{i=1}^{n} x_i = q^n\}$. D'une part,

$$\boldsymbol{x} \in [0, +\infty[^n \setminus K \implies |f(\boldsymbol{x})| > 1 + R. \tag{4.5}$$

D'autre part, $f(q, \dots, q) = (1 + q)^n$. Choisissons R tel que $1 + R > (1 + q)^n$. La restriction de la fonction continue f au compact non vide $K \cap S$ y atteint son minimum ; ce minimum est inférieur ou égal à $(1 + q)^n$. De plus ce minimum est aussi le minimum de f sur tout S : f atteint son minimum sur S. Notons

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda) := \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) - \lambda\left(\prod_{i=1}^{n} x_i - q^n\right) \ ; \tag{4.6}$$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$,

$$f_{-i}(\boldsymbol{x}) := \prod_{k \in \{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} (1 + x_k) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{1 + x_i}, \tag{4.7}$$

et

$$g_{-i}(\boldsymbol{x}) := \prod_{k \in \{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} x_k = \frac{g(\boldsymbol{x}) + q^n}{x_i}. \tag{4.8}$$

Si $\nabla \mathcal{L} = 0$, alors,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f_{-i}(\boldsymbol{x}) - \lambda g_{-i}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -g(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{4.10}$$

Donc

$$\lambda = \frac{f_{-1}(\boldsymbol{x})}{g_{-1}(\boldsymbol{x})} = \dots = \frac{f_{-n}(\boldsymbol{x})}{g_{-n}(\boldsymbol{x})} = \frac{x_1 f(\boldsymbol{x})}{(1+x_1)q^n} = \dots = \frac{x_n f(\boldsymbol{x})}{(1+x_n)q^n}, \tag{4.11}$$

d'où

$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} = \dots = \frac{x_n}{1+x_n} \tag{4.12}$$

et finalement $x_1 = x_2 = \dots = x_n = q$.
La méthode des multiplicateurs de Lagrange donne un seul point stationnaire de la lagrangienne, et on sait que le problème de minimum sous contrainte admet un minimum. Donc $(q, q, \dots, q)$ est bien le point de minimum de f sous la contrainte $g = 0$, et il est unique.

2) Le quotient de l'énoncé peut s'écrire

$$\left(x_0 \prod_{i=0}^{n} \left(1 + \frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \right)^{-1}. \tag{4.13}$$

Il s'agit donc d'étudier, s'ils existent, les points $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ en lesquels l'infimum

$$\inf \left\{ \prod_{i=0}^{n} \left(1 + \frac{x_{i+1}}{x_i} \right) : \forall i \in \{0, \dots, n\}, x_i < x_{i+1} \right\} \tag{4.14}$$

est atteint (ici $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, x_0 et x_{n+1} étant fixés). Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, notons $y_i := x_{i+1}/x_i$; $\prod_{i=0}^{n} y_i = x_{n+1}/x_0$. Notons également $q := (x_{n+1}/x_0)^{1/(n+1)} > 1$ et étudions, s'ils existent, les points en lesquels l'infimum

$$\inf \left\{ \prod_{i=0}^{n} (1 + y_i) : (y_0, \dots, y_n) \in \left]1, +\infty\right[^{n+1}, \prod_{i=0}^{n} y_i = q^{n+1} \right\} \tag{4.15}$$

est atteint (ici $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, mais il y a une contrainte). Par la première partie,

$$\prod_{i=0}^{n} (1 + y_i) \geqslant (1 + q)^{n+1} \tag{4.16}$$

avec égalité si et seulement si, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $y_i = q > 1$; autrement dit, si et seulement si $x_{i+1}/x_i = q > 1$. Ainsi le supremum de l'énoncé est atteint en un unique point $(x_1, \dots, x_n) = (x_0 q, x_0 q^2, \dots, x_0 q^n) \in \mathbb{R}^n$.