Série 15 du lundi 7 avril 2025

Exercice 1.

Considérons la fonction f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} - 8x^2 - 4y^4. \tag{1.1}$$

1) Caractériser les points stationnaires de f.
2) f a-t-elle un minimum global ?

Exercice 2.

Considérons la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geqslant 2)$ dont les coefficients $(A_{ij})_{i,j=1}^n$ sont définis par

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } |i-j| \geqslant 2, \\ -1 \text{ si } |i-j| = 1, \\ 2 \text{ si } i = j. \end{cases} \tag{2.1}$$

Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$; définissons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ par :

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}. \tag{2.2}$$

Démontrer que A est symétrique définie positive (donc inversible) et que f atteint son minimum en $\boldsymbol{a} \coloneqq A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Exercice 3.

Déterminer les extrema – en précisant leur type (min/max, local/global, strict/non strict) – de la fonction f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} + x^2 + 2y^2. \tag{3.1}$$

Exercice 4.

QCM 1. Vrai ou faux ? Soit une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. Si $n \geqslant 2$ est pair et $\det(H_f(\boldsymbol{x})) < 0$, alors $\boldsymbol{x}$ est un point selle de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

QCM 2. Vrai ou faux ? Soit une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert $E \subset \mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ et $\det(H_f(\boldsymbol{x})) > 0$.

— Si la trace de $H_f(\boldsymbol{x})$ (la somme des deux coefficients sur la diagonale) est strictement positive :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) > 0,$$
alors $\boldsymbol{x}$ est un point de minimum local strict de f ;

— et si
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) < 0,$$
alors $\boldsymbol{x}$ est un point de maximum local strict de f.

☐ VRAI ☐ FAUX