Série 15 du lundi 7 avril 2025

Exercice 1.

Considérons la fonction f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} - 8x^2 - 4y^4. \tag{1.1}$$

1) Caractériser les points stationnaires de f.
2) f a-t-elle un minimum global ?

Solution

1) Calculons les dérivées partielles des deux premiers ordres.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2} - 16x, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2} - 16y^3, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (2 + 4x^2)\mathrm{e}^{x^2+y^2} - 16, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (2 + 4y^2)\mathrm{e}^{x^2+y^2} - 48y^2, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}. \tag{1.6}$$

Les points stationnaires sont ceux pour lesquels les deux dérivées partielles d'ordre 1 sont nulles. D'une part $x = 0$ ou $\mathrm{e}^{x^2+y^2} = 8$, d'autre part $y = 0$ ou $\mathrm{e}^{x^2+y^2} = 8y^2$.

— Si $x = 0$, les points stationnaires vérifient soit $y = 0$ soit $\mathrm{e}^{y^2} = 8y^2$.

— Si $x \neq 0$, alors les points stationnaires vérifient $\mathrm{e}^{x^2+y^2} = 8$; donc ils vérifient soit $y = 0$ et $\mathrm{e}^{x^2} = 8$, soit $\mathrm{e}^{x^2+y^2} = 8y^2 = 8$.

Finalement, nous pouvons répartir les points stationnaires en quatre ensembles :

a) $\{(0, 0)\} =: S_1$;
b) $\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{e}^{y^2} = 8y^2\} =: S_2$ (quatre points), le graphe de $u \mapsto \mathrm{e}^u$ coupe le graphe de $u \mapsto 8u$ en deux points $(u_1, 8u_1)$ et $(u_2, 8u_2)$ avec $u_1 \in]0, 1[$ et $u_2 > 1$ (esquisser les deux graphes) ;
c) $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{e}^{x^2} = 8\} =: S_3$ (deux points) ;
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{e}^{x^2+1} = 8 \ ; \ y^2 = 1\} =: S_4$ (quatre points).

Donnons maintenant la nature de ces points stationnaires. Notons H_f la matrice hessienne de f.

Si $(x, y) \in S_1$,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{point selle.} \tag{1.7}$$

Si $(x, y) \in S_2$,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 16(y^2-1) & 0 \\ 0 & 32y^2(y^2-1) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \text{minimum local strict si } y^2 > 1, \\ \text{maximum local strict si } y^2 < 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Si $(x, y) \in S_3$,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 32x^2 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{minimum local strict.} \tag{1.9}$$

Si $(x, y) \in S_4$,

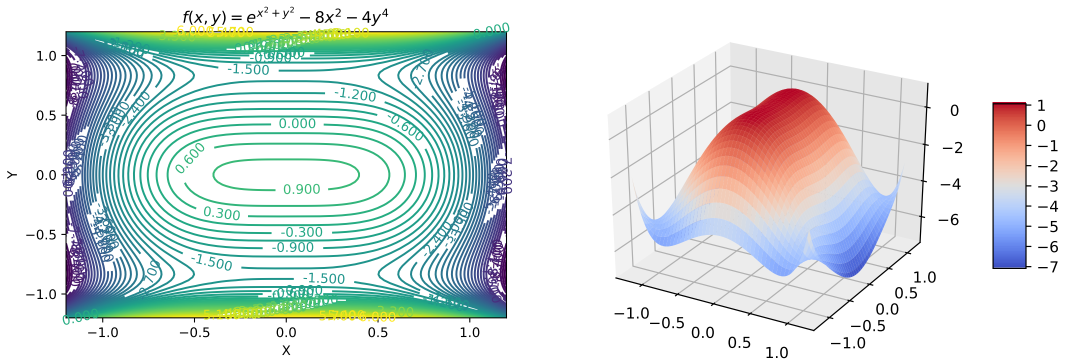
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 32x^2 & 32xy \\ 32xy & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{point selle.} \tag{1.10}$$

2) Il existe un minimum global. En effet, pour $x^2 + y^2 > 1$ nous avons

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} - 8x^2 - 4y^4 \geqslant \mathrm{e}^{x^2+y^2} - 8(x^2+y^2)x^2 - 4y^4 \geqslant \mathrm{e}^{x^2+y^2} - 8(x^2+y^2)^2. \tag{1.11}$$

Puisque $\lim_{s\to+\infty}(\mathrm{e}^s - 8s^2) = +\infty$, il existe $r > 1$ tel que, $\forall (x,y) \in \mathrm{B}(0,r)^{\complement}$, $f(x,y) > f(0,0) = 1$. De plus, f est continue sur $\overline{\mathrm{B}}(0,r)$. Elle y atteint son minimum (inférieur ou égal à $f(0,0)$), qui est aussi le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$. Puisque tout point de minimum doit être à l'interieur de la boule $\overline{\mathrm{B}}(0,r)$, tout point de minimum doit être un point stationnaire donc parmi les points de minimum local déjà obtenus.

La figure 1a représente les lignes de niveau de la fonction f ; les valeurs croissent du bleu au vert. La figure 1b représente le graphe de la fonction f.



(a) Lignes de niveau de f (b) Graphe de f

FIGURE 1 – Visualisations de f

Exercice 2.

Considérons la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geqslant 2)$ dont les coefficients $(A_{ij})_{i,j=1}^{n}$ sont définis par

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } |i-j| \geqslant 2, \\ -1 \text{ si } |i-j| = 1, \\ 2 \text{ si } i = j. \end{cases} \tag{2.1}$$

Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$; définissons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ par :

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}. \tag{2.2}$$

Démontrer que A est symétrique définie positive (donc inversible) et que f atteint son minimum en $\boldsymbol{a} \coloneqq A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Solution

Commençons par montrer que A, symétrique, est définie positive. Explicitons la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

On a, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (vu comme un vecteur colonne, de même $\boldsymbol{b}$) :

$$\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} = x_1(2x_1 - x_2) + \sum_{i=2}^{n-1} x_i(-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}) + x_n(-x_{n-1} + 2x_n) \tag{2.4}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \tag{2.5}$$

$$= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 \geqslant 0, \tag{2.6}$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Ceci prouve que A est définie positive, et donc inversible.

Puisque A est symétrique, $\nabla f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$. En effet

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{1}{2} A_{pq} \frac{\partial(x_p x_q)}{\partial x_i} - \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial(b_p x_p)}{\partial x_i} \tag{2.7}$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n} \frac{1}{2} A_{pq}(\delta_{iq} x_p + \delta_{ip} x_q) - \sum_{p=1}^{n} \delta_{ip} b_p \tag{2.8}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} A_{pi} x_p + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n} A_{iq} x_q - b_i = \frac{1}{2}(A^\top \boldsymbol{x})_i + \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x})_i - b_i. \tag{2.9}$$

On en tire alors que le seul point stationnaire de f est donné par $\boldsymbol{a} \coloneqq A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Remarque. On aurait pu écrire simplement :

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^\top A\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{h} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{h}, \tag{2.10}$$

et identifier la partie linéaire par rapport à $\boldsymbol{h}$: $\boldsymbol{h} \mapsto (\boldsymbol{x}^\top A - \boldsymbol{b}^\top)\boldsymbol{h}$, et donc $\nabla f(\boldsymbol{x})^\top = \boldsymbol{x}^\top A - \boldsymbol{b}^\top$.

La matrice hessienne de f en tout point est A. En effet :

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{p,q=1}^{n} A_{pq} \frac{\partial^2 (x_p x_q)}{\partial x_i \partial x_j} && (2.11)\\
&= \sum_{p,q=1}^{n} A_{pq} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_p \frac{\partial (x_q)}{\partial x_j} + x_q \frac{\partial (x_p)}{\partial x_j} \right) && (2.12)\\
&= \sum_{p,q=1}^{n} A_{pq} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(x_p \delta_{jq} + x_q \delta_{jp} \big) && (2.13)\\
&= \sum_{p,q=1}^{n} A_{pq}\big(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} \big) && (2.14)\\
&= A_{ij} + A_{ji} = 2A_{ij}. && (2.15)
\end{aligned}
$$

Par la formule de Taylor, on a

$$
f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})^\top (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^\top A (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^\top A (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}), \quad (2.16)
$$

avec un reste nul car f est un polynôme de degré 2 en $\boldsymbol{x}$. Par conséquent, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{a}\}$, $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$. Ainsi f admet un minimum global strict en $\boldsymbol{a}$.

Exercice 3.

Déterminer les extrema – en précisant leur type (min/max, local/global, strict/non strict) – de la fonction f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$
f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} + x^2 + 2y^2. \quad (3.1)
$$

Solution

Calculons les dérivées des deux premiers ordres.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y\mathrm{e}^{xy} + 2x, && (3.2)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x\mathrm{e}^{xy} + 4y, && (3.3)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= y^2\mathrm{e}^{xy} + 2, && (3.4)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= x^2\mathrm{e}^{xy} + 4, && (3.5)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \mathrm{e}^{xy}(1 + xy). && (3.6)
\end{aligned}
$$

Les points stationnaires sont $(0, 0)$ ainsi que les (x, y) tels que $xy < 0$ et $\mathrm{e}^{xy} = -2x/y = -4y/x$. Pour ces derniers, on a $x^2 = 2y^2$ et $xy < 0$ ce qui donne $y = -x/\sqrt{2}$. On a donc $\mathrm{e}^{-x^2/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ ce qui est impossible.

Pour l'unique point stationnaire $(0, 0)$ la matrice hessienne s'écrit :

$$
H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (3.7)
$$

dont les valeurs propres sont $3\pm\sqrt{2}$ et donc > 0. La matrice est donc symétrique et définie positive ; ainsi le point $(0,0)$ est un point de minimum local strict. En fait c'est l'unique point de minimum global. En effet $f(x,y) \geqslant 4$ si $x^2+y^2 \geqslant 4$. D'autre part la restriction de f à $\overline{\mathrm{B}}((0,0),2)$ est continue, et $\overline{\mathrm{B}}((0,0),2)$ est compact. Elle y atteint donc son minimum. Ce minimum doit forcement être à l'interieur de $\mathrm{B}((0,0),2)$ car $f|_{\partial\mathrm{B}((0,0),2)} \geqslant 4 > f(0,0)$ et donc il est necessairement un point stationaire. Il s'ensuit que 1 est le minimum global de f, atteint en $(0,0)$. Par contre, f n'a pas de maximum local/global (car l'unique point stationnaire correspond à un minimum local strict). Au final, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a un minimum global et, puisque f est de classe C^1 et $(0,0)$ est l'unique point stationnaire, le point de minimum est nécessairement $(0,0)$.

Exercice 4.

QCM 1. Vrai ou faux ? Soit une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Si $n \geqslant 2$ est pair et $\det(H_f(\boldsymbol{x})) < 0$, alors $\boldsymbol{x}$ est un point selle de f.

■ VRAI ☐ FAUX

Solution

Comme $A = H_f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice symétrique (car f est C^2), il existe une base orthonormée $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A. Notons par $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, les valeurs propres correspondantes. L'algèbre linéaire nous assure que $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$. En effet, notons encore par $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice inversible dont les colonnes sont constituées par les vecteurs propres $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$:

$$V = (\boldsymbol{v}_1| \quad \dots \quad |\boldsymbol{v}_n).$$

On a

$$AV = (\lambda_1\boldsymbol{v}_1| \quad \dots \quad |\lambda_n\boldsymbol{v}_n) = V\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\det(A)\det(V) = \det(V)(\prod_{i=1}^n \lambda_i).$$

Ainsi $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ comme voulu (car $\det(V) \neq 0$).

Si n est pair et $\det(A) < 0$, les valeurs propres ne peuvent pas être toutes $\geqslant 0$ ou toutes $\leqslant 0$. Il existe donc $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\lambda_i < 0$ et $\lambda_j > 0$. D'où $(A\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = (\lambda_i\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = \lambda_i < 0$ et de même $(A\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j) > 0$. Ainsi A est symétrique indéfinie et donc, d'après un théorème du cours, $\boldsymbol{x}$ est un point selle de f.

QCM 2. Vrai ou faux ? Soit une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert $E \subset \mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ et $\det(H_f(\boldsymbol{x})) > 0$.

— Si la trace de $H_f(\boldsymbol{x})$ (la somme des deux coefficients sur la diagonale) est strictement positive :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) > 0,$$

alors $\boldsymbol{x}$ est un point de minimum local strict de f ;

— et si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) < 0,$$

alors $\boldsymbol{x}$ est un point de maximum local strict de f.

■ VRAI ☐ FAUX

Solution

Comme $A = H_f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est une matrice symétrique (car f est C^2), il existe une base orthonormée $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ constituée de deux vecteurs propres de A. Notons par $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ les valeurs propres correspondantes, et I la matrice identité 2×2. Elles sont solutions de $\det(\lambda I - A) = 0$, autrement dit, si $A = (a_{i,j})$ avec $a_{1,2} = a_{2,1}$, elles sont solutions de

$$0 = (\lambda - a_{1,1})(\lambda - a_{2,2}) - a_{2,1}a_{1,2} = \lambda^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\lambda + \det(A) = \lambda^2 - \operatorname{trace}(A)\lambda + \det(A).$$

Or

$$\operatorname{trace}(A)^2 - 4\det(A) = (a_{1,1} + a_{2,2})^2 - 4(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2) = (a_{1,1} - a_{2,2})^2 + 4a_{1,2}^2 \geqslant 0.$$

Cette équation admet donc deux solutions réelles :

$$\frac{\operatorname{trace}(A) \pm \sqrt{\operatorname{trace}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

Comme on suppose que $\det(A) > 0$, on a $0 \leqslant \sqrt{\operatorname{trace}(A)^2 - 4\det(A)} < |\operatorname{trace}(A)|$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi $\operatorname{trace}(A) > 0$ implique $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, et $\operatorname{trace}(A) < 0$ implique $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. D'où $\operatorname{trace}(A) > 0$ implique que $H_f(\boldsymbol{x})$ est définie positive, et $\operatorname{trace}(A) < 0$ implique que $H_f(\boldsymbol{x})$ est définie négative. Ceci permet de conclure, grâce à un théorème du cours.