# Série 14 du mercredi 2 avril 2025

## Exercice 1.

Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} x - y^3 + z + 8 = 0, \\ x^3 + y^4 - z^5 - 16 = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

1) Montrer que (1.1) définit, au voisinage du point $x = 0$, deux fonctions implicites $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$, telles que $(\phi_1(0), \phi_2(0)) = (2, 0)$.
2) Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 de chacune des deux courbes $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$.
3) Quelle autre paire de fonctions implicites (1.1) définit-il :
   a) $x = \phi_1(y)$ et $z = \phi_2(y)$ au voisinage de 2, avec $(\phi_1(2), \phi_2(2)) = (0, 0)$, ou bien
   b) $x = \phi_1(z)$ et $y = \phi_2(z)$ au voisinage de 0, avec $(\phi_1(0), \phi_2(0)) = (0, 2)$ ?

## Exercice 2.

Soit $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie par

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2 + w_1^2 \\ e^{u_1} - 1 + u_2 + w_2 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

1) Montrer que $\boldsymbol{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (0, 0)^\top$ et que $\boldsymbol{h} \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2) Soit $\epsilon > 0$ ; notons $\mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ la boule ouverte de rayon $\epsilon$ centrée sur $\mathbf{0}$. Montrer que, si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit, $\exists \boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^2(\mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon), \mathbb{R}^2)$ telle que, $\forall \boldsymbol{w} \in \mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon)$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$.
3) Calculer $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\mathbf{0})$.

## Exercice 3.

Considérons la fonction $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5$ par

$$F(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} xy^2 + xzu + yv^2 - 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 \end{pmatrix} ; \tag{3.1}$$

et l'équation

$$F(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

1) Montrez que $(1, 1, 1, 1, 1)$ est solution de (3.2).
2) Dans l'équation (3.2), est-il possible d'exprimer $u$ et $v$ en fonction de $(x, y, z)$ au voisinage de $(1, 1, 1, 1, 1)$ ?
3) Quelles autres paires de variables peuvent être exprimées en fonction des autres au voisinage de $(1, 1, 1, 1, 1)$ ?

## Exercice 4.

Notons

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \tag{4.1}$$

la sphère de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 centrée en l'origine.

1) Identifier les points $(x_0, y_0, z_0) \in S$ au voisinage desquels on peut décrire $S$ comme le graphe d'une fonction $\Gamma = \Gamma(x, y)$ définie dans un voisinage $U$ de $(x_0, y_0)$. Pour les points où une telle fonction $\Gamma$ existe, écrire $\Gamma$ explicitement. Pour les autres points, prouver qu'une telle fonction n'existe pas.
2) Donner l'équation du plan tangent à $S$ en un point quelconque $(x_0, y_0, z_0) \in S$ (c'est-à-dire le plan tangent au graphe de la fonction $\Gamma(x, y)$ du point précédent. Est-ce que l'expression du plan tangent est valable aussi aux points $(x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 = 0$ ?) .