Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-03-31 au 2025-04-04

Série 14 du mercredi 2 avril 2025

Exercice 1.

Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} x - y^3 + z + 8 = 0, \\ x^3 + y^4 - z^5 - 16 = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

1) Montrer que (1.1) définit, au voisinage du point $x = 0$, deux fonctions implicites $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$, telles que $(\phi_1(0), \phi_2(0)) = (2, 0)$.
2) Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 de chacune des deux courbes $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$.
3) Quelle autre paire de fonctions implicites (1.1) définit-il :
   a) $x = \phi_1(y)$ et $z = \phi_2(y)$ au voisinage de 2, avec $(\phi_1(2), \phi_2(2)) = (0, 0)$, ou bien
   b) $x = \phi_1(z)$ et $y = \phi_2(z)$ au voisinage de 0, avec $(\phi_1(0), \phi_2(0)) = (0, 2)$?

Solution

1) Notons $f_1(x, y, z) = x - y^3 + z + 8$ et $f_2(x, y, z) = x^3 + y^4 - z^5 - 16$. Nous avons

$$f_1(0, 2, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_2(0, 2, 0) = 0. \tag{1.2}$$

Le but est d'exprimer y et z comme fonctions de x – respectivement ϕ_1 et ϕ_2 – pour avoir dans un voisinage de 0 :

$$f_1(x, \phi_1(x), \phi_2(x)) = f_2(x, \phi_1(x), \phi_2(x)) = 0. \tag{1.3}$$

Prenons x dans un tel voisinage ; nous voulons résoudre le système de deux équations

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

à deux inconnues y et z. Nous avons

$$\mathrm{D}_{(y,z)} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y^2 & 1 \\ 4y^3 & -5z^4 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

donc

$$\det\bigl(\mathrm{D}_{(y,z)} f(0, 2, 0)\bigr) = \det \begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 32 & 0 \end{pmatrix} = -32 \neq 0. \tag{1.6}$$

Le théorème des fonctions implicites permet alors d'affirmer qu'il existe $\delta > 0$ et deux fonctions $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{C}^1(]-\delta, +\delta[, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in]-\delta, +\delta[$,

$$\begin{cases} f_1(x, \phi_1(x), \phi_2(x)) = 0, \\ f_2(x, \phi_1(x), \phi_2(x)) = 0, \\ \phi_1(0) = 2, \\ \phi_2(0) = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

En particulier, nous avons bien

$$\begin{cases} x - (\phi_1(x))^3 + \phi_2(x) + 8 = 0, \\ x^3 + (\phi_1(x))^4 - (\phi_2(x))^5 - 16 = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

2) En dérivant les relations (1.8) et en les évaluant en $x = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} 1 - 3(\phi_1(0))^2 \phi_1'(0) + \phi_2'(0) = 0, \\ 4(\phi_1(0))^3 \phi_1'(0) - 5(\phi_2(0))^4 \phi_2'(0) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 12\phi_1'(0) + \phi_2'(0) = 0, \\ 32\phi_1'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\iff \begin{cases} \phi_1'(0) = 0, \\ \phi_2'(0) = -1. \end{cases} \tag{1.10}$$

La tangente à la courbe $y = \phi_1(x)$ au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = \phi_1(0) = 2$ et la tangente à la courbe $z = \phi_2(x)$ au point d'abscisse 0 a pour équation $z = \phi_2(0) + \phi_2'(0) \times (x - 0) = -x$.

3) D'autre part,

$$\mathrm{D}\, f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -3y^2 & 1 \\ 3x^2 & 4y^3 & -5z^4 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

donc

$$\det\bigl(\mathrm{D}_{(x,z)}\, f(0, 2, 0)\bigr) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{1.12}$$

On ne peut donc pas utiliser le théorème des fonctions implicites pour s'assurer que x et z s'expriment comme fonctions de y de classe C^1 au voisinage de $y = 2$.

Remarque. Cela ne signifie pas qu'il est impossible a priori d'expliciter x et z comme fonctions de y au voisinage de $y = 2$ (continues, ou même de classe C^1). Dans certains problèmes, une reformulation préliminaire de l'énoncé peut permettre l'application du théorème des fonctions implicites. Néanmoins, dans notre exemple, il est en effet impossible d'expliciter x et z comme fonctions $x = \psi_1(y)$ et $z = \psi_2(y)$ de classe C^1 de y au voisinage de $y = 2$. Pour le voir, supposons que ce soit possible, et soit $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$ comme dans les parties 1 et 2 ci-dessus. Pour tout x suffisamment proche de 0, $(x, \phi_1(x), \phi_2(x))$ serait suffisamment proche de $(0, 2, 0)$ pour permettre d'écrire $x = \psi_1(y)$ avec $y = \phi_1(x)$. D'où $x = \psi_1(\phi_1(x))$ et la contradiction $1 = \psi_1'(\phi_1(0))\phi_1'(0) = \psi_1'(2) \cdot 0 = 0$ par (1.10).

En revanche,

$$\det\bigl(\mathrm{D}_{(x,y)}\, f(0, 2, 0)\bigr) = \det \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = 32 \neq 0. \tag{1.13}$$

Le théorème des fonctions implicites permet donc d'exprimer x et y en fonction de z au voisinage de $z = 0$.

Exercice 2.

Soit $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie par

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2 + w_1^2 \\ e^{u_1} - 1 + u_2 + w_2 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

1) Montrer que $\boldsymbol{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (0, 0)^\top$ et que $\boldsymbol{h} \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2) Soit $\epsilon > 0$; notons $\mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ la boule ouverte de rayon ϵ centrée sur $\mathbf{0}$. Montrer que, si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit, $\exists \boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^2(\mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon), \mathbb{R}^2)$ telle que, $\forall \boldsymbol{w} \in \mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon)$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$.
3) Calculer $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\mathbf{0})$.

Solution

1) Puisque chaque composante de $\boldsymbol{h}$ est une somme de fonctions C^2, $\boldsymbol{h}$ est aussi C^2.
2) Il suffit de vérifier le théorème des fonctions implicites. Notons $\boldsymbol{h} := (h_1, h_2)^\top$, $\boldsymbol{u} := (u_1, u_2)$, et $\boldsymbol{w} := (w_1, w_2)$. Comme $\boldsymbol{h} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, nous avons

$$\mathrm{D}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \frac{\partial h_1}{\partial w_1} & \frac{\partial h_1}{\partial w_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & \frac{\partial h_2}{\partial w_1} & \frac{\partial h_2}{\partial w_2} \end{pmatrix} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 1 & 2w_1 & 0 \\ e^{u_1} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

et notons

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), \quad \mathrm{D}_{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial w_1} & \frac{\partial h_1}{\partial w_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial w_1} & \frac{\partial h_2}{\partial w_2} \end{pmatrix} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}). \tag{2.3}$$

Puisque $\det(\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0})) \neq 0$, d'après le théorème des fonctions implicites il existe $\epsilon > 0$ et une fonction $\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^2(\mathrm{B}((0,0), \epsilon), \mathbb{R}^2)$ telle que $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ et, pour tout $\boldsymbol{w} \in \mathrm{B}((0,0), \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$ et $\det(\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w})) \neq 0$.
3) Posons $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}) := \boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w})$ pour $\boldsymbol{w} \in \mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon)$; ceci définit une fonction $\boldsymbol{g}$ de classe C^2 : elle vaut la constante $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{D}\,\boldsymbol{g} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\cdot), \cdot) \times \mathrm{D}\,\boldsymbol{f} + \mathrm{D}_{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\cdot), \cdot) \tag{2.4}$$

d'où

$$\mathrm{D}\,\boldsymbol{f} = -(\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\cdot), \cdot))^{-1}\,\mathrm{D}_{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\cdot), \cdot). \tag{2.5}$$

Donc,

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{w}}\,\boldsymbol{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies (\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}))^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

et, finalement,

$$\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Exercice 3.

Considérons la fonction $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5$ par

$$F(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} xy^2 + xzu + yv^2 - 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 \end{pmatrix} ; \tag{3.1}$$

et l'équation

$$F(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

1) Montrez que $(1, 1, 1, 1, 1)$ est solution de (3.2).
2) Dans l'équation (3.2), est-il possible d'exprimer u et v en fonction de (x, y, z) au voisinage de $(1, 1, 1, 1, 1)$?
3) Quelles autres paires de variables peuvent être exprimées en fonction des autres au voisinage de $(1, 1, 1, 1, 1)$?

Solution

1) Par calcul direct :

$$F(1, 1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1+1+1-3 \\ 1+2-1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

2) En calculant le jacobien de F nous obtenons :

$$\mathrm{D}\, F(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} y^2 + zu & 2yx + v^2 & xu & xz & 2yv \\ 2v & u^3z & u^3y & 3u^2yz - 2u^2v^2 & 2x - 2u^2v^2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

d' où

$$\mathrm{D}\, F(1, 1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Donc, puisque

$$\det\big(\mathrm{D}\, F_{(u,v)}(1, 1, 1, 1, 1)\big) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.6}$$

nous pouvons exprimer u et v en fonction de x, y et z.

3) De même, de (3.5) nous avons qu'en calculant les déterminants de chaque paire, nous pouvons exprimer toutes les paires de variables en fonction des autres sauf (x, z), (z, u) et (x, u).

Exercice 4.

Notons

$$S := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}, \tag{4.1}$$

la sphère de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 centrée en l'origine.

1) Identifier les points $(x_0, y_0, z_0) \in S$ au voisinage desquels on peut décrire S comme le graphe d'une fonction $\Gamma = \Gamma(x, y)$ définie dans un voisinage U de (x_0, y_0). Pour les points où une telle fonction Γ existe, écrire Γ explicitement. Pour les autres points, prouver qu'une telle fonction n'existe pas.
2) Donner l'équation du plan tangent à S en un point quelconque $(x_0, y_0, z_0) \in S$ (c'est-à-dire le plan tangent au graphe de la fonction $\Gamma(x, y)$ du point précédent. Est-ce que l'expression du plan tangent est valable aussi aux points (x_0, y_0, z_0) avec $z_0 = 0$?) .

Solution

1) Notons $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$. « $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ » est une condition suffisante pour décrire S localement autour d'un point $(x_0, y_0, z_0) \in S$ comme un graphe de la forme $\{(x, y, \Gamma(x, y)) : (x, y) \in U\}$, avec $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert contenant (x_0, y_0) Dans cet exemple, comme $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0$, ceci est équivalent à $z_0 \neq 0$. Explicitement, pour $z_0 > 0$ la fonction Γ est donnée pour tout $(x, y) \in \mathrm{B}(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^2$ par

$$\Gamma(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \tag{4.2}$$

pour $z_0 < 0$, elle est donnée par

$$\Gamma(x, y) := -\sqrt{1 - x^2 - y^2}. \tag{4.3}$$

Ici $U = \mathrm{B}(\mathbf{0}, 1)$ peut être choisi d'une manière qui ne dépend pas de (x_0, y_0, z_0), pourvu que $z_0 \neq 0$.

La condition « $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ » est suffisante mais pas nécessaire pour exprimer z comme une fonction des autres variables. Or, dans cet exemple, on peut démontrer qu'une telle description n'existe pas pour les points $(x_0, y_0, 0)$. Procédons par contradiction : supposons qu'on a un voisinage $V \subset \mathbb{R}^3$ de $(x_0, y_0, 0)$, un voisinage $U \subset \mathbb{R}^2$ de (x_0, y_0), et une fonction $\Gamma : U \to \mathbb{R}$ tels que

$$S \cap V = \{(x, y, \Gamma(x, y)) : (x, y) \in U\}. \tag{4.4}$$

Comme $(x_0, y_0, 0) \in S$, on a $x_0^2 + y_0^2 = 1$, i.e. $(x_0, y_0) \in \partial\overline{\mathrm{B}(\mathbf{0}, 1)}$. Or U est un voisinage de (x_0, y_0), donc il contient des points de $\overline{\mathrm{B}(\mathbf{0}, 1)}^{\complement}$. Choisissons donc $(x, y) \in U \setminus \overline{\mathrm{B}(\mathbf{0}, 1)}$, i.e. tels que $x^2 + y^2 > 1$. L'équation (4.4) implique

$$0 = g(x, y, \Gamma(x, y)) = x^2 + y^2 + \Gamma(x, y)^2 - 1 > 1 + 0 - 1 = 0, \tag{4.5}$$

d'où une contradiction.

2) On a $\boldsymbol{v} := \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 2(x_0, y_0, z_0)^\top \neq \mathbf{0}$ pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Alors le plan tangent au point $(x_0, y_0, z_0) \in S$ est donné par les points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant

$$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0, \tag{4.6}$$
$$\iff 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0, \tag{4.7}$$
$$\iff x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1. \tag{4.8}$$

L'expression reste valable pour $z_0 = 0$. Comme $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in S$, alors en particulier pour tout $(x_0, y_0, 0) \in S$, il existe toujours un indice $i \in \{1, 2\}$ tel que $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0, y_0, 0) \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites pour exprimer cette variable x_i en fonction des autres variables, et ensuite obtenir l'expression du plan tangent qui demeure inchangée.