Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-03-31 au 2025-04-04

Série 13 du lundi 31 mars 2025

Exercice 1.

Considérons l'équation

$$1 - y^2 + x^2 y e^y = 0. \tag{1.1}$$

1) Montrer que (1.1) définit dans un voisinage du point $x = 0$ une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$.
2) Montrer que ϕ admet un minimum local en 0.

Exercice 2.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une fonction $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x, y(x)) = 0. \tag{2.1}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$; notons $b := y(a)$. Supposons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0, \quad \text{et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) > 0. \tag{2.2}$$

Montrer que y atteint un maximum local en a.

Exercice 3.

Considérons l'équation

$$-1 + x^2 + yz^5 + \arctan(xyz) + \ln\frac{\sqrt{1+x+z}}{3z} + \ln\sqrt[3]{y^2+z^3} = 0 \tag{3.1}$$

1) Montrer que (3.1) définit, au voisinage du point $(1, 0)$, une fonction implicite $z = \phi(x, y)$ telle que $\phi(1, 0) = 7$.
2) Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x, y)$ au point $(1, 0)$.

Exercice 4.

Soit la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^2 + 4z^2 = 6\}$. Donner l'équation du plan tangent à S au point $(-1, 1, 1)$.

Exercice 5.

QCM 1. Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$$

et on considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ implicitement définie par l'équation

$$f(x,y,g(x,y)) = 11\,.$$

Sachant que $g(1,3) = -2$, on a

- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = \frac{12}{5}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 0$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 11$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = \frac{9}{2}$