

Série 13 du lundi 31 mars 2025

Exercice 1.

Considérons l'équation

$$1 - y^2 + x^2 y \mathrm{e}^y = 0. \tag{1.1}$$

1) Montrer que (1.1) définit dans un voisinage du point $x = 0$ une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$.
2) Montrer que ϕ admet un minimum local en 0.

Solution

1) Notons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 1 - y^2 + x^2 y \mathrm{e}^y$. Nous avons $f(0, y) = 1 - y^2$ et ainsi $f(0, 1) = f(0, -1) = 0$. Le point $(0, 1)$ est donc solution de $f(x, y) = 0$. Par ailleurs,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + x^2 \mathrm{e}^y + x^2 y \mathrm{e}^y \tag{1.2}$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -2 \neq 0. \tag{1.3}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\delta > 0$ et $\phi :]-\delta, +\delta[\to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, \phi(x)) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(0) = 1. \tag{1.4}$$

Puisque $f \in \mathrm{C}^\infty$, ϕ est également de classe C^∞.

2) En dérivant $x \mapsto f(x, \phi(x))$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \phi'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) = 0, \tag{1.5}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + \phi'(0) \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 0. \tag{1.6}$$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \neq 0$, donc $\phi'(0) = 0$. Si on dérive encore une fois la relation (1.5), on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \phi(x)) + 2\phi'(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \phi(x)) + \phi'(x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \phi(x)) + \phi''(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) = 0. \tag{1.7}$$

Or $\phi'(0) = 0$, donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) + \phi''(0) \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 0. \tag{1.8}$$

Ainsi $2\mathrm{e} - 2\phi''(0) = 0$, ce qui montre que $\phi''(0) = \mathrm{e} > 0$. En conclusion, ϕ atteint un minimum local en 0.

Exercice 2.

Soit $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une fonction $y \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x, y(x)) = 0. \tag{2.1}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$; notons $b := y(a)$. Supposons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0, \quad \text{et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) > 0. \tag{2.2}$$

Montrer que y atteint un maximum local en a.

Solution

Dérivons la relation (2.1) pour obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x) = 0. \tag{2.3}$$

Avec les hypothèses (2.2), on obtient $y'(a) = 0$: a est un point stationnaire de y.

Dérivons la relation (2.3).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y(x)) + 2y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y(x)) + y'(x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y(x)) + y''(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x)) = 0. \tag{2.4}$$

En évaluant cette relation pour $x = a$, avec $y'(a) = 0$ et les hypothèses (2.2), nous obtenons $y''(a) < 0$. La fonction y atteint donc bien un maximum local en a.

Exercice 3.

Considérons l'équation

$$-1 + x^2 + yz^5 + \arctan(xyz) + \ln\frac{\sqrt{1+x+z}}{3z} + \ln\sqrt[3]{y^2+z^3} = 0 \tag{3.1}$$

1) Montrer que (3.1) définit, au voisinage du point $(1,0)$, une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(1,0) = 7$.
2) Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(1,0)$.

Solution

1) Notons $E := \left]-1,+\infty\right[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, qui contient $(1,0,7)$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = {} & -1 + x^2 + yz^5 + \arctan xyz \\ & + \frac{1}{2}\ln(1+x+z) - \ln 3 - \ln z + \frac{1}{3}\ln(y^2+z^3). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in E$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 5yz^4 + \frac{xy}{1+x^2y^2z^2} + \frac{1}{2(1+x+z)} - \frac{1}{z} + \frac{z^2}{y^2+z^3}. \tag{3.3}$$

Puisque $f(1,0,7) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,7) = \frac{1}{18} \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe $\delta > 0$ et une unique fonction $\phi \in \mathrm{C}^1(\mathrm{B}((1,0),\delta),\mathbb{R})$ telle que $\phi(1,0) = 7$ et, pour tout $(x,y) \in \mathrm{B}((1,0),\delta)$,

$$(x,y,\phi(x,y)) \in E \quad \text{et} \quad f(x,y,\phi(x,y)) = 0. \tag{3.4}$$

2) Pour tout $(x,y,z) \in E$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + \frac{yz}{1+x^2y^2z^2} + \frac{1}{2(1+x+z)} \ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0,7) = 2 + \frac{1}{18} \ ; \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z^5 + \frac{xz}{1+x^2y^2z^2} + \frac{2y}{3(y^2+z^3)} \ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,7) = 7^5 + 7. \tag{3.6}$$

Le plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(1,0)$ correspond au plan tangent à la surface déterminée (localement) par l'équation $f(x,y,z) = 0$ au point $(1,0,7)$. Il est donc donné par :

$$\left\langle \nabla f(1,0,7), \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-7 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{37}{18}x + (7^5+7)y + \frac{1}{18}z - \frac{22}{9} = 0, \tag{3.7}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel.

Remarque. Cette équation s'obtient aussi par l'égalité à zéro du polynôme de Taylor d'ordre 1 de f au point $(1,0,7)$, en utilisant que $f(1,0,7) = 0$.

Exercice 4.

Soit la surface $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^2 + 4z^2 = 6\}$. Donner l'équation du plan tangent à S au point $(-1,1,1)$.

Solution

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^4 + y^2 + 4z^2 - 6$. Alors S est décrite par l'équation $f(x,y,z) = 0$. Remarquons que l'on a bien $f(-1,1,1) = (-1)^4 + 1^2 + 4 \cdot 1^2 - 6 = 0$. L'équation cartésienne du plan tangent à S au point $(-1,1,1)$ est donnée par

$$\nabla f(-1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0,$$

où $\cdot$ est pour le produit scalaire. On utilise la fait que $\nabla f(-1,1,1) \neq \mathbf{0}$. Ainsi $-4(x+1) + 2(y-1) + 8(z-1) = 0$, c'est-à-dire, $2x - y - 4z + 7 = 0$: ceci est l'équation du plan tangent à S au point $(-1,1,1)$.

Exercice 5.

QCM 1. Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$$

et on considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ implicitement définie par l'équation

$$f\big(x, y, g(x, y)\big) = 11\,.$$

Sachant que $g(1, 3) = -2$, on a

- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{12}{5}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 11$
- ■ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = \frac{9}{2}$

Solution

En dérivant l'équation $f\big(x, y, g(x, y)\big) - 11 = 0$ par rapport à x on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$$

et donc, puisque $g(1, 3) = -2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, -2) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, -2) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) = 0\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(1, 3) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3, -2)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1, 3, -2)} = \left[-\frac{-9yx^2}{6z^2 - 6y}\right]_{(x,y,z)=(1,3,-2)} \\ &= -\frac{-27}{24 - 18} = \frac{9}{2}\,.\end{aligned}$$