Série 12 du mercredi 26 mars 2025

Exercice 1.

Notons $U := \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$; on considère l'application $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

1) $\boldsymbol{f}$ est-elle un difféomorphisme local ?
2) Trouver, si elle est définie, l'application réciproque de $\boldsymbol{f}$.
3) Donner l'ensemble $\boldsymbol{f}^{-1}(]0, +\infty[^3)$ et calculer la matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}^{-1}$. Trouver le jacobien de $\boldsymbol{f}^{-1}$ en fonction du jacobien de $\boldsymbol{f}$.

Exercice 2.

1) Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides et $\boldsymbol{f} : E \to F$ un difféomorphisme local en tout point de E. Montrer que si $\boldsymbol{f}$ est une bijection entre E et F, alors $\boldsymbol{f}$ est un difféomorphisme global.
2) Soient $\boldsymbol{h} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\epsilon \in \mathbb{R}_{+*}$; pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, notons $\boldsymbol{f}_\epsilon(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $|||\mathrm{D}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})||| \leqslant M$. $|||\cdot|||$ dénote la norme spectrale d'une matrice : pour tout $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$|||A||| := \sup\{\|A\boldsymbol{x}\| : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \tag{2.1}$$

avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Montrer que, si $\epsilon < M^{-1}$, $\boldsymbol{f}_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme global.

Indication. Vous pouvez montrer que $\boldsymbol{f}_\epsilon$ est bijective en utilisant le théorème du point fixe de Banach.

Exercice 3.

Définitions. Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ouverts et $\psi : U \to V$ un difféomorphisme.

— Si $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ est strictement positif partout, on dit que ψ « préserve l'orientation ».

— Si $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ est strictement négatif partout, on dit que ψ « renverse l'orientation ».

1) Montrer que si U est connexe par arcs, alors soit ψ préserve l'orientation, soit ψ renverse l'orientation.
2) Donner des exemples d'ouverts U et V qui ne sont pas connexes par arcs et d'un difféomorphisme $\psi : U \to V$ qui ne préserve ni ne renverse l'orientation.

Exercice 4.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que le système d'équations

$$\begin{cases} x + \sin(xy) = \varepsilon \\ \cos(xy) + y = 1 + \varepsilon \end{cases}$$

a une solution unique dans un voisinage de $(0,0)$, pour ε suffisamment petit.

Exercice 5.

QCM 1. Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$