Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-03-24 au 2025-03-28

Série 12 du mercredi 26 mars 2025

Exercice 1.

Notons $U := \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$; on considère l'application $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

1) $\boldsymbol{f}$ est-elle un difféomorphisme local ?
2) Trouver, si elle est définie, l'application réciproque de $\boldsymbol{f}$.
3) Donner l'ensemble $\boldsymbol{f}^{-1}(]0, +\infty[^3)$ et calculer la matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}^{-1}$. Trouver le jacobien de $\boldsymbol{f}^{-1}$ en fonction du jacobien de $\boldsymbol{f}$.

Solution

1) La matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}$ est

$$\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Donc

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(r, \theta, \phi)) &= r\cos(\theta)\cos(\phi) r \sin(\theta)\cos(\phi)\cos(\theta) && (1.3) \\ &\quad + r\sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\phi) r\sin(\theta) \\ &\quad + r\sin(\theta)\sin(\phi) r\cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\theta) \\ &\quad + \sin(\theta)\cos(\phi) r\sin(\theta)\cos(\phi) r\sin(\theta) \\ &= r^2 \sin(\theta)\big(\cos^2(\phi)\cos^2(\theta) + \sin^2(\phi)\sin^2(\theta) && (1.4) \\ &\qquad + \sin^2(\phi)\cos^2(\theta) + \cos^2(\phi)\sin^2(\theta)\big) \\ &= r^2 \sin(\theta) \neq 0. && (1.5) \end{aligned}$$

Alors $\boldsymbol{f}$ est un difféomorphisme local en tout point $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$.

2) Nous pouvons définir la fonction réciproque $\boldsymbol{f}^{-1} : V \to U$ avec $V := \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$: on supprime le demi-plan fermé qui n'est pas dans l'image de $\boldsymbol{f}$. Pour tout $(x, y, z) \in V$, on définit

$$\boldsymbol{f}^{-1}(x, y, z) := \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ g(x, y, z) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

La fonction g peut-être définie par morceaux, comme suit :

$$g(x,y,z) := \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } y > 0, \\ 2\pi - \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } y < 0, \\ \pi - \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

La troisième région n'est pas disjointe des deux premières, mais, lorsque deux formules pour g sont possibles, elles définissent bien la même fonction. On s'est aussi assuré que ces trois expressions sont de classe C^1 sur leurs régions respectives.

3) Nous trouvons aisément $\boldsymbol{f}^{-1}(]0,+\infty[^3) = \mathbb{R}_+^* \times]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour calculer la matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}^{-1}$, notons $s := \sqrt{x^2+y^2}$ et $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$\mathrm{D}\,(\boldsymbol{f}^{-1})(x,y,z) = \begin{pmatrix} x/r & y/r & z/r \\ zx/r^2s & zy/r^2s & -s/r^2 \\ -y/s^2 & x/s^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

(les trois expressions ci-dessus pour g conduisant au même résultat) et $\det(\mathrm{D}\,(\boldsymbol{f}^{-1})(x,y,z)) = 1/rs$. Ce dernier résultat peut également être obtenu à partir du jacobien de $\boldsymbol{f}$:

$$\det(\mathrm{D}\,(\boldsymbol{f}^{-1})(x,y,z)) = \det(\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(r,\theta,\phi))^{-1} = \frac{1}{r^2\sin(\theta)} = \frac{1}{rs}. \tag{1.9}$$

Exercice 2.

1) Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides et $\boldsymbol{f} : E \to F$ un difféomorphisme local en tout point de E. Montrer que si $\boldsymbol{f}$ est une bijection entre E et F, alors $\boldsymbol{f}$ est un difféomorphisme global.

2) Soient $\boldsymbol{h} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\epsilon \in \mathbb{R}_{+*}$; pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, notons $\boldsymbol{f}_\epsilon(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $|||\mathrm{D}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})||| \leqslant M$. $|||\cdot|||$ dénote la norme spectrale d'une matrice : pour tout $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$|||A||| := \sup\{\|A\boldsymbol{x}\| : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \tag{2.1}$$

avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Montrer que, si $\epsilon < M^{-1}$, $\boldsymbol{f}_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme global.

Indication. Vous pouvez montrer que $\boldsymbol{f}_\epsilon$ est bijective en utilisant le théorème du point fixe de Banach.

Solution

1) Puisque $\boldsymbol{f}$ est une bijection, elle admet une application inverse $\boldsymbol{g} : F \to E$. De plus, $\mathrm{D}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ est continue en tout point $\boldsymbol{y} \in F$ car $\boldsymbol{f}$ est un difféomorphisme local en $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \in E$. Donc $\boldsymbol{g} \in \mathrm{C}^1(F)$ et $\boldsymbol{f}$ est un difféomorphisme global.

2) D'après le point 1, il suffit de montrer que $\boldsymbol{f}_\epsilon$ est bijective et est un difféomorphisme local sur $\mathbb{R}^n$.

Bijectivité. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

(I) $\boldsymbol{f}_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une bijection ;

(II) $\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, $\exists! \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{f}_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}$;

(III) Pour tout, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, l'application $\phi_{\boldsymbol{z}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, définie pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ par $\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{z} - \epsilon \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, a un unique point fixe.

Prouvons que (III) est vrai. Soit $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$|||\,\mathrm{D}\,\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x})|||= \epsilon |||\,\mathrm{D}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})||| \leqslant \epsilon M < 1, \tag{2.2}$$

donc pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
\|\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{y}) - \phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x})\| &= \left\| \int_0^1 \mathrm{D}\,\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \right\| && (2.3)\\
&\leqslant \int_0^1 \|\mathrm{D}\,\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\|\,\mathrm{d}t && (2.4)\\
&\leqslant \int_0^1 |||\,\mathrm{D}\,\phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))||| \times \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\,\mathrm{d}t && (2.5)\\
&\leqslant \epsilon M \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| \ ; && (2.6)
\end{aligned}$$

donc $\phi_{\boldsymbol{z}}$ est contractante sur $\mathbb{R}^n$, qui est un ensemble fermé. Il s'ensuit que $\phi_{\boldsymbol{z}}$ a un unique point fixe dans $\mathbb{R}^n$ (i.e. $\exists! \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = \phi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x})$) : nous avons prouvé (III). On en conclut (I) : $\boldsymbol{f}_\epsilon$ est bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Difféomorphisme local. Il suffit de montrer que, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \mathbb{I} + \epsilon\,\mathrm{D}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ est inversible – i.e. $\det(\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}_\epsilon(\boldsymbol{x})) \neq 0$.

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}_\epsilon(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \epsilon\,\mathrm{D}\,h(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Alors

$$\|\boldsymbol{v}\| = \|\epsilon\,\mathrm{D}\,h(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}\| \leqslant \epsilon |||\,\mathrm{D}\,h(\boldsymbol{x})||| \times \|\boldsymbol{v}\| \leqslant \epsilon M \|\boldsymbol{v}\| < \|\boldsymbol{v}\|. \tag{2.7}$$

Ceci implique $\|\boldsymbol{v}\| = 0$, i.e. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. On en déduit que, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\det(\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}_\epsilon(\boldsymbol{x})) \neq 0$. Par conséquent, $\boldsymbol{f}_\epsilon$ est un difféomorphisme local en tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, et également global sur $\mathbb{R}^n$ puisque $\boldsymbol{f}_\epsilon$ est une bijection.

Exercice 3.

Définitions. Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ouverts et $\psi : U \to V$ un difféomorphisme.

— Si $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ est strictement positif partout, on dit que ψ « préserve l'orientation ».

— Si $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ est strictement négatif partout, on dit que ψ « renverse l'orientation ».

1) Montrer que si U est connexe par arcs, alors soit ψ préserve l'orientation, soit ψ renverse l'orientation.

2) Donner des exemples d'ouverts U et V qui ne sont pas connexes par arcs et d'un difféomorphisme $\psi : U \to V$ qui ne préserve ni ne renverse l'orientation.

Solution

1) Supposons l'existence de $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ tels que $\det(\mathrm{D}\,\psi)(\boldsymbol{a}) < 0$ et $\det(\mathrm{D}\,\psi)(\boldsymbol{b}) > 0$. Comme U est connexe par arcs et $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ est continu, l'image de U par $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ est un intervalle. Puisque cet intervalle contient une valeur strictement négative et une valeur strictement positive, $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ doit s'annuler sur U. Or ceci est impossible puisque ψ est un difféomorphisme ; cette contradiction prouve le résultat.
2) Considérer $U =]1,2[\cup]-4,-3[$, $V =]1,2[\cup]3,4[$ et $\psi = |\cdot|$. N.B. ψ n'est pas différentiable en 0, mais ce point n'appartient pas à U.

Exercice 4.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que le système d'équations

$$\begin{cases} x + \sin(xy) = \varepsilon \\ \cos(xy) + y = 1 + \varepsilon \end{cases}$$

a une solution unique dans un voisinage de $(0,0)$, pour ε suffisamment petit.

Solution

On définit

$$\mathbf{F}(x,y) := \begin{pmatrix} x + \sin(xy) \\ \cos(xy) + y \end{pmatrix}.$$

Nous allons appliquer le théorème d'inversion locale à $\mathbf{F}$, qui est de classe $C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$, en $(0,0)$.

$$\mathbf{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$D\mathbf{F}_{(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy) + 1 \end{pmatrix}.$$

En l'origine, on a

$$D\mathbf{F}_{(x,y)}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est évidemment inversible. Les hypothèses du théorème sont donc satisfaites et il existe un voisinage U de $(0,0)$ et un voisinage V de $(0,1)$ tels que $F : U \to V$ est un difféomorphisme, donc un particulier inversible. Pour ϵ suffisamment petit, on a $(\epsilon, 1+\epsilon) \in V$ donc il existe un seul point $(x^*, y^*) \in U$ tel que $F(x^*, y^*) = (\epsilon, 1+\epsilon)$.

Exercice 5.

QCM 1. Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- [ ] $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
- [ ] $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$
- [x] $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$
- [ ] $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

Solution

On calcule la dérivée partielle concernée. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}(-1) = -1.$$

Remarque : Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-5y^4(x^4+y^4) - 4y^3(x^5-y^5)}{(x^4+y^4)^2} = \frac{-y^8 - 5y^4x^4 - 4y^3x^5}{(x^4+y^4)^2}$$

et la limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'existe pas car, par exemple,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0 \neq -1 = \lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(0,y).$$