Analyse avancée II
Mathématiques 1$^{\text{ère}}$ année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-03-24 au 2025-03-28

Série 11 du lundi 24 mars 2025

Exercice 1.

Définissons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

1) Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$; que $\Gamma \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$; et que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Indication. L'intégrale discutée ici entre 0 et $+\infty$ doit être comprise comme une somme d'une intégrale généralisée sur $]0, c]$ et d'une intégrale généralisée sur $[c, +\infty[$ pour une constante $0 < c < \infty$. Etudier chacune de ces deux intégrales (avec un paramètre) séparément.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$; i.e. Γ permet de généraliser la notion de factorielle à des arguments non entiers.

Exercice 2.

Définissons la fonction

$$F := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

1) Montrer que l'application F admet une fonction inverse locale autour du point $(0, 1)$, et que cette fonction inverse est de classe C^1.
2) F est-elle globalement inversible ?

Indication. Vous pouvez utiliser le théorème sur l'existence d'un inverse local.

Exercice 3.

Soient $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ ouverts ; soient $\phi \in \mathrm{C}^1(U, V)$ et $\psi \in \mathrm{C}^1(V, W)$ deux difféomorphismes. Montrer que $\psi \circ \phi$ est un difféomorphisme.

Exercice 4.

Soient $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons $f'(x_0) \neq 0$. Il existe alors deux ouverts $U \ni x_0$ et $V \ni f(x_0)$, et $g : V \to U$ une fonction inverse locale de f en x_0. Montrer que $g \in \mathrm{C}^2(V, U)$.