Série 11 du lundi 24 mars 2025

Exercice 1.

Définissons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathit{\Gamma}(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

1) Montrer que $\mathit{\Gamma}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$; que $\mathit{\Gamma} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$; et que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathit{\Gamma}^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Indication. L'intégrale discutée ici entre 0 et $+\infty$ doit être comprise comme une somme d'une intégrale généralisée sur $]0, c]$ et d'une intégrale généralisée sur $[c, +\infty[$ pour une constante $0 < c < \infty$. Etudier chacune de ces deux intégrales (avec un paramètre) séparément.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathit{\Gamma}(x + 1) = x\mathit{\Gamma}(x)$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathit{\Gamma}(n + 1) = n!$; i.e. $\mathit{\Gamma}$ permet de généraliser la notion de factorielle à des arguments non entiers.

Solution

Remarque. Le cours (§ 5.3) a été détaillé pour une intégrale généralisée dépendant de paramètres, pour un intervalle d'intégration non compact du type $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Cependant la théorie s'adapte à tout intervalle non compact ; l'adaptation au cas $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ est directe.

Dans le présent exercice, la question porte sur une intégrale généralisée définie sur l'intervalle non compact $]0, +\infty[$. Il y a donc deux difficultés : en 0 et « en $+\infty$ », mais la théorie du cours reste valable. En cas de doutes, écrire l'intégrale généralisée (avec un paramètre) comme une somme d'une intégrale généralisée sur $]0, 1]$ et d'une intégrale généralisée sur $[1, +\infty[$, puis étudier chacune de ces deux intégrales (avec un paramètre) séparément.

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; notons $\gamma_x := t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ (pour chaque x fixé, on obtient ainsi une fonction de t). Observons que γ_x est continue sur $]0, +\infty[$, $0 < \gamma_x(t) \leqslant t^{x-1}$ sur $]0, 1]$ et $0 < \gamma_x(t) \leqslant C/t^2$ sur $[1, +\infty[$ pour une certaine constante $C > 0$ dépendante de x. En effet $\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-t}t^2 = 0$. Comme $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\int_1^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$ converge, nous en déduisons que $\int_0^{+\infty} \gamma_x$ converge. $\mathit{\Gamma}$ est donc bien définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   Soient $0 < a < b < +\infty$. Nous allons maintenant montrer que $\mathit{\Gamma} \in \mathrm{C}^\infty(]a, b[)$. Notons $\gamma(t, x) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$ et observons que $\gamma \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ et, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k\gamma}{\partial x^k}(t, x) = \ln(t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}. \tag{1.3}$$

Soient $x \in]a,b[$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Si $t \leqslant 1$, $t^x \leqslant t^a$; si $t \geqslant 1$, $t^x \leqslant t^b$. Ainsi, pour tout $x \in]a,b[$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(t,x)\right| \leqslant |\ln(t)|^k \mathrm{e}^{-t} t^{-1} \max\{t^a, t^b\} := g_k(t). \tag{1.4}$$

Nous avons donc une fonction majorante de $\left|\frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}\right|$ indépendante de la variable $x \in]a,b[$; montrons que $\int_0^{+\infty} g_k$ converge.
Puisque

$$\lim_{t\to 0^+} t^s g_k(t) = \lim_{t\to 0^+} t^s |\ln(t)|^k \mathrm{e}^{-t} t^{a-1} = 0, \quad \forall s > 1-a, \tag{1.5}$$

$\int_0^1 g_k$ converge. Puisque $\lim_{t\to+\infty} t^2 g_k(t) = 0$, $\int_1^{+\infty} g_k$ converge. Finalement, $\int_0^{+\infty} g_k$ converge. Par conséquent, $\mathit{\Gamma} \in \mathrm{C}^k(]a,b[)$: appliquer les résultats du cours et effectuer une récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Ce résultat étant valable pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in]a,+\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$, nous en déduisons $\mathit{\Gamma} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. De plus,

$$\mathit{\Gamma}^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1.6}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   a) Intégrons par parties :

$$\mathit{\Gamma}(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\mathit{\Gamma}(x). \tag{1.7}$$

   Notons que cette manœuvre est licite parce que $\int_0^{+\infty} x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe. En cas de doutes, intégrer d'abord sur $[t_1, 1]$ (en effectuant l'intégration par parties) puis étudier $\lim_{t_1\to 0^+}$; ensuite faire de même sur $[1, t_2]$ puis étudier $\lim_{t_2\to+\infty}$.
   b) Nous constatons que $\mathit{\Gamma}(1) = 1$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathit{\Gamma}(n+1) = n!$.

Exercice 2.

Définissons la fonction

$$F := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

1) Montrer que l'application F admet une fonction inverse locale autour du point $(0,1)$, et que cette fonction inverse est de classe C^1.
2) F est-elle globalement inversible ?

Indication. Vous pouvez utiliser le théorème sur l'existence d'un inverse local.

Solution

Calculons la matrice jacobienne de F et son déterminant [1] :

$$\mathrm{D}\,F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \implies \det(\mathrm{D}\,F(x,y)) = 4x^2 + 4y^2 \implies \det(\mathrm{D}\,F(0,1)) \neq 0. \tag{2.2}$$

Il existe donc une fonction inverse locale dans un voisinage du point $(0,1)$.

Cependant, F n'est pas inversible globalement puisque non-injective. Par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les deux points (x,x) et $(-x,-x)$ sont différents mais ont même image par F : $(0, 2x^2)$. On peut néanmoins trouver une fonction inverse locale dans un voisinage de (x,x) et une fonction inverse locale dans un voisinage de $(-x,-x)$.

Exercice 3.

Soient $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ ouverts ; soient $\phi \in \mathrm{C}^1(U,V)$ et $\psi \in \mathrm{C}^1(V,W)$ deux difféomorphismes. Montrer que $\psi \circ \phi$ est un difféomorphisme.

Solution

Nous savons que $\phi^{-1} \circ \psi^{-1} \in \mathrm{C}^1(W,U)$; montrons qu'elle est également l'inverse de $\psi \circ \phi$. Par associativité de la composition :

$$(\psi \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \psi^{-1}) = \psi \circ (\phi \circ \phi^{-1}) \circ \psi^{-1} = \psi \circ \mathbb{I}_V \circ \psi^{-1} = \mathbb{I}_W. \tag{3.1}$$

De même $(\phi^{-1} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi) = \mathbb{I}_U$. Nous avons noté $\mathbb{I}_U$ la fonction identité $\mathbb{I}_U : U \to U$ qui envoie tout point de U sur lui-même, de même pour $\mathbb{I}_V : V \to V$ et $\mathbb{I}_W : W \to W$.

Exercice 4.

Soient $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons $f'(x_0) \neq 0$. Il existe alors deux ouverts $U \ni x_0$ et $V \ni f(x_0)$, et $g : V \to U$ une fonction inverse locale de f en x_0. Montrer que $g \in \mathrm{C}^2(V,U)$.

Solution

Notons $V \subset \mathbb{R}$ le voisinage de $f(x_0)$ où l'inverse locale g est définie. D'après le théorème d'existence d'une fonction inverse locale, $g \in \mathrm{C}^1(V,\mathbb{R})$. On peut calculer sa dérivée g' en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées. Puisque $g \circ f = \mathbb{I}_U$ (la fonction identité qui envoie tout point de U sur lui-même),

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' = 1. \tag{4.1}$$

Donc, $\forall x \in V$,

$$g'(f(g(x))) \times f'(g(x)) = 1 \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \tag{4.2}$$

$$\implies g' = \frac{1}{f' \circ g}. \tag{4.3}$$

Comme $(g' \circ f) \cdot f' = 1$, nous pouvons affirmer que f' ne s'annule pas sur $U = g(V)$. Cela nous permet de justifier que la fonction $(f')^{-1} = \frac{1}{f'} \in \mathrm{C}^1(g(V),\mathbb{R})$ (elle intervient dans (4.3)). Alors $g' \in \mathrm{C}^1(V,\mathbb{R})$ en tant que composition de fonctions de classe C^1 (de $(f')^{-1}$ et g, cf (4.3)).

Remarque. Il est important de noter que dans l'expression (4.3), la fonction g est toujours de classe C^1 pourvu que les hypothèses du théorème d'inversion locale soient vérifiées. Par induction, $f \in \mathrm{C}^k \implies g \in \mathrm{C}^k$. Ce résultat s'étend aux fonctions de plusieurs variables.

1. Couramment appelé « jacobien » de F.