Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-03-17 au 2025-03-21

Série 10 du mercredi 19 mars 2025

Exercice 1.

Soit $x \in \,]0, +\infty[$. Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \ln\big(x^2 \cos^2(t) + \sin^2(t)\big)\,\mathrm{d}t =: g(x). \tag{1.1}$$

Justifier toutes les étapes.

Indication. Calculer g' et en déduire g, en observant que $g(1) = 0$.

Exercice 2.

Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \sin\Big(x\sqrt{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Montrer que f admet un minimum local en 0.

Exercice 3.

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $\boldsymbol{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$, une fonction continue. Prouver que

$$\left\| \int_a^b \boldsymbol{f}(t) dt \right\| \leqslant \int_a^b \|\boldsymbol{f}(t)\| dt,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Exercice 4.

QCM 1. Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + x^2 e^{\sin(y)}$. Alors la matrice hessienne de f en (x, y) est

- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big) & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & -x^2\sin(y) \end{pmatrix}$
- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big) \end{pmatrix}$
- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\cos(y)^2 \end{pmatrix}$

QCM 2. Vrai ou faux ?

Q1 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe, alors f est continue en (x_0, y_0).

Q2 : Soit une fonction $f\colon A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in A \times \mathbb{R}$, où $A \subset \mathbb{R}$ est ouvert. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0)$ existe, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y_0)$ existe.

Q3 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $r_0 > 0$ et une fonction $g\colon\,]0, r_0[\, \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$. Si $\big|f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\big| \leqslant g(r)$ pour tout $r \in\,]0, r_0[$ et *tout* $\varphi \in [0, 2\pi[$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Q4 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit une fonction $g\colon\,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$. S'il existe une valeur φ_0 de $\varphi \in [0, 2\pi[$ telle que $|f(r\cos(\varphi_0), r\sin(\varphi_0))| \leqslant g(r)$ pour tout $r \in\,]0, \infty[$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.