Série 10 du mercredi 19 mars 2025

Exercice 1.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \ln\big(x^2 \cos^2(t) + \sin^2(t)\big)\,\mathrm{d}t =: g(x). \tag{1.1}$$

Justifier toutes les étapes.

Indication. Calculer g' et en déduire g, en observant que $g(1) = 0$.

Solution

D'après le théorème de dérivation des fonctions dépendant d'un paramètre (cf. cours, § 5.1, deuxième théorème), g est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

$$g'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x\cos^2(t)}{x^2\cos^2(t) + \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

(avec $z := \tan(t)$)

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + z^2}\frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \tag{1.3}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2x}{1-x^2}\left(\frac{1}{z^2+x^2} - \frac{1}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z \tag{1.4}$$

$$= \frac{2x}{1-x^2}\lim_{Z\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{Z}{x}\right) - \arctan(Z)\right) \tag{1.5}$$

$$= \frac{\pi}{1+x}\,. \tag{1.6}$$

Les intégrales généralisées sont absolument convergentes (en fait les intégrandes sont strictement positives sur $[0, +\infty[$). En cas de doute sur la manipulation des intégrales généralisées sur $[0, +\infty[$, intégrer d'abord sur $[0, Z]$ puis étudier $\lim_{Z\to+\infty}$.

La continuité de g' en 1 assure que $g'(1) = \pi/2$. On obtient

$$g(x) = g(x) - g(1) = \int_1^x \frac{\pi}{1+t}\,\mathrm{d}t = \pi\ln\left(\frac{1+x}{2}\right). \tag{1.7}$$

Exercice 2.

Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \sin\Big(x\sqrt{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Montrer que f admet un minimum local en 0.

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}$. La formule de dérivation d'intégrale paramétrique (cf. cours, §5.2, premier théorème) donne

$$f'(x) = \sin\Big(x\sqrt{1+x^2}\Big) + \int_0^x \sqrt{1+t^2}\cos\Big(x\sqrt{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t\ ; \tag{2.2}$$

en particulier, $f'(0) = 0$.

Étudions maintenant f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) = \cos\Big(x\sqrt{1+x^2}\Big) \times \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ + \sqrt{1+x^2}\cos\Big(x\sqrt{1+x^2}\Big) - \int_0^x (1+t^2)\sin\Big(x\sqrt{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t\ ; \end{aligned} \tag{2.3}$$

en particulier, $f''(0) = 2$. Ainsi, f admet bien un minimum local en 0.

Exercice 3.

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $\boldsymbol{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t))$, une fonction continue. Prouver que

$$\left\|\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt\right\| \leqslant \int_a^b \|\boldsymbol{f}(t)\|dt,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Solution

Première méthode. Chaque fonction $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\ i = 1, \ldots, m$, est intégrable, ainsi que la fonction $g = \|\boldsymbol{f}\| : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, étant une composition de fonctions continues sur $[a,b]$. Notons $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de composantes $v_i = \int_a^b f_i(t)dt$, $\ i = 1, \ldots, m$. Si $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, l'inégalité est évidente. Si $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, alors

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \left\|\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt\right\|^2 = \sum_{i=1}^m v_i v_i = \int_a^b \sum_{i=1}^m v_i f_i(t)dt \leqslant \int_a^b \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{f}(t)\|dt$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et on peut diviser par $\|\boldsymbol{v}\|$ à gauche et à droite.
Deuxième méthode :

$$\left\|\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}\boldsymbol{f}\Big(a+(b-a)k/n\Big)\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}\boldsymbol{f}\Big(a+(b-a)k/n\Big)\right\|$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left\|\frac{b-a}{n}\boldsymbol{f}\Big(a+(b-a)k/n\Big)\right\| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}\left\|\boldsymbol{f}\Big(a+(b-a)k/n\Big)\right\| = \int_a^b \|\boldsymbol{f}(t)\|dt.$$

Cette deuxième preuve est valable pour toute norme.

Exercice 4.

QCM 1. Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + x^2 e^{\sin(y)}$. Alors la matrice hessienne de f en (x,y) est

- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big) & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & -x^2\sin(y) \end{pmatrix}$
- ■ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\big(\cos(y)^2 - \sin(y)\big) \end{pmatrix}$
- ☐ $e^{\sin(y)} \begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\cos(y)^2 \end{pmatrix}$

QCM 2. Vrai ou faux ?

Q1 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ et soit $(x_0,y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe, alors f est continue en (x_0,y_0).

Q2 : Soit une fonction $f\colon A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $(x_0,y_0) \in A \times \mathbb{R}$, où $A \subset \mathbb{R}$ est ouvert. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ existe, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y_0)$ existe.

Q3 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $r_0 > 0$ et une fonction $g\colon]0,r_0[\to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$. Si $\big|f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\big| \leqslant g(r)$ pour tout $r \in]0,r_0[$ et *tout* $\varphi \in [0,2\pi[$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Q4 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit une fonction $g\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$. S'il existe une valeur φ_0 de $\varphi \in [0,2\pi[$ telle que $|f(r\cos(\varphi_0), r\sin(\varphi_0))| \leqslant g(r)$ pour tout $r \in]0,\infty[$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Solution

Q1 : **Réponse : faux**. L'existence de la limite ne suffit pas, il faut en plus que cette limite soit égale à la valeur de f en (x_0,y_0), c'est-à-dire que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Q2 : **Réponse : faux**. Considérons $A = \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$ et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0,0) = 1$ et $f(x,y) = 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Posons encore $g(x,y) = f(x,0)$. On obtient $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$, mais $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ n'existe pas car $\lim\limits_{x\to 0} g(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} g(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} 1 = 1$.

Q3 : **Réponse : vrai**. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$, il existe $\delta \in]0,r_0]$ tel que $|g(r)| \leqslant \epsilon$ pour tout $r \in]0,\delta]$. D'où $|f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))| \leqslant g(r) \leqslant \epsilon$ pour tout $r \in]0,\delta]$ et tout $\varphi \in [0,2\pi[$. Ainsi $|f(x,y)| \leqslant \epsilon$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \|(x,y)\| \leqslant \delta$.

Q4 : **Réponse : faux**. Contre-exemple : soit $f(x,0) = 0$ pour $x \in]0,\infty[$, $f(x,y) = 1$ sinon, et soit $g(r) = 0$ pour tout $r \in]0,\infty[$. Alors pour $\varphi = 0$, on a pour tout $r \in]0,\infty[$,

$$0 = |f(r,0)| = |f(r\cos(0), r\sin(0))| = g(r)\,,$$

mais la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.