Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-03-17 au 2025-03-21

Série 9 du lundi 17 mars 2025

Exercice 1.

Considérons l'espace $M(m,n)$ des matrices réelles de taille $m \times n$. Nous noterons $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$ et celle de $\mathbb{R}^n$, indifféremment.

1) Montrer que $M(m,n)$, muni des opérations usuelles de somme des matrices et proportion par un scalaire, est un espace vectoriel.
2) Considérons l'application

$$|||\cdot||| : M(m,n) \to \mathbb{R}_+, \quad |||A||| = \sup\left\{ \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\} \right\}, \tag{1.1}$$

appelée « norme spectrale ».

a) Prouver que $|||\cdot|||$ est bien définie sur $M(m,n)$.
b) Prouver que $|||\cdot|||$ est une norme sur $M(m,n)$.
c) Montrer que le supremum de (1.1) est un maximum, i.e.

$$\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\} : \frac{\|A\boldsymbol{y}\|_2}{\|\boldsymbol{y}\|_2} = |||A|||. \tag{1.2}$$

3) Considérons l'application

$$\|\cdot\|_F : M(m,n) \to \mathbb{R}_+, \quad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2}, \tag{1.3}$$

appelée « norme de Frobenius ».

a) Montrer que $\|\cdot\|_F$ définit également une norme sur $M(m,n)$.
b) Trouver deux constantes strictement positives C_1, C_2 telles que, $\forall A \in M(m,n)$,

$$C_1 |||A||| \leqslant \|A\|_F \leqslant C_2 |||A|||. \tag{1.4}$$

Exercice 2.

Soients $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

1) On effectue le changement de variable suivant :

$$F(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2a}, \frac{u-v}{2} \right) \tag{2.1}$$

Calculer $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, où x et y représentent respectivement la première et la seconde variable de f.

2) Montrer que si f vérifie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \tag{2.2}$$

alors il existe $g, h \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f(x,y) = g(ax+y) + h(ax-y)$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

Écrire le développement limité à l'ordre 3 et au point $(1,1)$ de la fonction

$$f = (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{xy},$$

en utilisant le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u$ en 0.
Indication. Écrire $f(x,y) = \mathrm{e}^{1+u}$, où $u \coloneqq (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$. Justifier toutes les étapes.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = \left((x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2\right)^{1/2}.$$

Écrire le polynôme de Taylor de degré 2 de f en $(0,0,0)$.