Série 9 du lundi 17 mars 2025

Exercice 1.

Considérons l'espace $M(m,n)$ des matrices réelles de taille $m \times n$. Nous noterons $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$ et celle de $\mathbb{R}^n$, indifféremment.

1) Montrer que $M(m,n)$, muni des opérations usuelles de somme des matrices et proportion par un scalaire, est un espace vectoriel.
2) Considérons l'application

$$|||\cdot||| : M(m,n) \to \mathbb{R}_+, \quad |||A||| = \sup\left\{ \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\} \right\}, \tag{1.1}$$

appelée « norme spectrale ».

   a) Prouver que $|||\cdot|||$ est bien définie sur $M(m,n)$.
   b) Prouver que $|||\cdot|||$ est une norme sur $M(m,n)$.
   c) Montrer que le supremum de (1.1) est un maximum, i.e.

$$\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\} : \frac{\|A\boldsymbol{y}\|_2}{\|\boldsymbol{y}\|_2} = |||A|||. \tag{1.2}$$

3) Considérons l'application

$$\|\cdot\|_F : M(m,n) \to \mathbb{R}_+, \quad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2}, \tag{1.3}$$

appelée « norme de Frobenius ».

   a) Montrer que $\|\cdot\|_F$ définit également une norme sur $M(m,n)$.
   b) Trouver deux constantes strictement positives C_1, C_2 telles que, $\forall A \in M(m,n)$,

$$C_1 |||A||| \leqslant \|A\|_F \leqslant C_2 |||A|||. \tag{1.4}$$

Solution

1) Veuillez vérifier les huit propriétés de la définition d'un espace vectoriel réel (cf. polycopié). Observez que $M(m,n)$ et $\mathbb{R}^k$ avec $k = mn$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels, où un isomorphisme possible fait correspondre à $A \in M(m,n)$ le vecteur colonne dans $\mathbb{R}^k$ obtenu en mettant successivement l'une en-dessous de l'autre les n colonnes de A.
2) a) La fonction $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ ($\boldsymbol{x}$ et $A\boldsymbol{x}$ vus comme vecteurs colonnes) est continue sur $\mathbb{R}^n$ (chaque composante de cette fonction est en effet une combinaison linéaire des fonctions continues $\boldsymbol{x} \mapsto x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$), et la fonction $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) := \|A\boldsymbol{x}\|_2$ aussi en tant que composition d'applications continues. Notons $S_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Puisque S_1 est compacte et f est continue, la restriction $f|_{S_1}$ est bornée et donc $\sup_{\boldsymbol{x} \in S_1} f(\boldsymbol{x}) < +\infty$, autrement dit, $|||A||| < +\infty$.

b) Soit $A \in M(m,n)$. On a que $|||A||| \geqslant 0$, et

$$|||A||| = 0 \implies (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|A\boldsymbol{x}\|_2 = 0) \implies A = 0_{M(m,n)}. \tag{1.5}$$

Ensuite,

$$|||\lambda A||| = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|\lambda A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{|\lambda|\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = |\lambda| \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = |\lambda|\, |||A|||. \tag{1.6}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
|||A+B||| &= \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|(A+B)\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} && (1.7)\\
&\leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2 + \|B\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} && (1.8)\\
&\leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|B\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} && (1.9)\\
&= |||A||| + |||B|||. && (1.10)
\end{aligned}$$

c) Puisque S_1 est compacte et f continue, la restriction $f|_{S_1}$ est bornée et ses bornes sont atteintes sur S_1. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&|||A||| = \sup\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in S_1\} = \max\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in S_1\} && (1.11)\\
\text{et}\quad &\exists \boldsymbol{y} \in S_1\ \|A\boldsymbol{y}\|_2 = \max\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in S_1\} = |||A|||. && (1.12)
\end{aligned}$$

Le maximum est aussi atteint en $-\boldsymbol{y}$, et peut-être en d'autres vecteurs de norme 1.

3) a) Une première solution est d'utiliser l'isomorphisme ci-dessus entre $M(m,n)$ et $\mathbb{R}^{mn}$; en effet, si $A \in M(m,n)$ est envoyée sur $\boldsymbol{x}_A \in \mathbb{R}^{mn}$ par cet isomorphisme, alors la définition de $\|A\|_F$ donne immédiatement $\|A\|_F = \|\boldsymbol{x}_A\|_2$ (norme euclidienne). Mais voici aussi la solution qui ne passe pas par cet isomorphisme.

Clairement, on a $\|A\|_F \geqslant 0$, $\forall A \in M(m,n)$. Ensuite, si $\|A\|_F = 0$, alors $A_{i,j} = 0$ pour tous $i \in \{1,\dots,m\}$ et $j \in \{1,\dots,n\}$, et donc $A = 0_{M(m,n)}$.

Pour la deuxième propriété, $\|\lambda A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} \lambda^2 A_{i,j}^2} = |\lambda| \|A\|_F$. Enfin, utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_F^2 &= \sum_{i,j} (A_{i,j} + B_{i,j})^2 && (1.13)\\
&= \sum_{i,j} A_{i,j}^2 + \sum_{i,j} B_{i,j}^2 + 2\sum_{i,j} A_{i,j}B_{i,j} && (1.14)\\
&\leqslant \sum_{i,j} A_{i,j}^2 + \sum_{i,j} B_{i,j}^2 + 2\left(\sum_{i,j} A_{i,j}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j} B_{i,j}^2\right)^{1/2} && (1.15)\\
&= (\|A\|_F + \|B\|_F)^2. && (1.16)
\end{aligned}$$

b) De nouveau, on peut utiliser utiliser l'isomorphisme ci-dessus entre $M(m,n)$ et $\mathbb{R}^{mn}$; en effet, comme déjà mentionné, si $A \in M(m,n)$ est envoyée sur $\boldsymbol{x}_A \in \mathbb{R}^{mn}$ par cet isomorphisme, alors la définition de $\|A\|_F$ donne $\|A\|_F = \|\boldsymbol{x}_A\|_2$. De plus, en posant $N(\boldsymbol{x}_A) := |||A|||$, on vérifie facilement que l'on définit ainsi une norme N sur

$\mathbb{R}^{mn}$ (en utilisant que $|||\cdot|||$ est une norme sur $M(m,n)$). Comme toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^{mn}$, il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que, pour tout $A \in M(m,n)$, $C_1 N(\boldsymbol{x}_A) \leqslant \|\boldsymbol{x}_A\|_2 \leqslant C_2 N(\boldsymbol{x}_A)$ et donc $C_1|||A||| \leqslant \|A\|_F \leqslant C_2|||A|||$.
On peut aussi résoudre le problème explicitement. Soit $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^n$, $(\boldsymbol{e}_j)_{j=1}^n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(\boldsymbol{a}_j)_{j=1}^n$ les colonnes de A. Alors, on a

$$
\begin{aligned}
\|A\boldsymbol{x}\|_2^2 = \left\|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\right\|_2^2 &\leqslant \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\|_2\right)^2 && (1.17)\\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n \|\boldsymbol{a}_j\|_2^2\right) && (1.18)\\
&= \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{i,j}^2\right) && (1.19)\\
&= \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \|A\|_F^2. && (1.20)
\end{aligned}
$$

Donc, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, $\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \leqslant \|A\|_F$, c'est-à-dire, $|||A||| \leqslant \|A\|_F$. De manière similaire,

$$
\begin{aligned}
\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} A_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^n \|\boldsymbol{a}_j\|_2^2 &= \sum_{j=1}^n \|A\boldsymbol{e}_j\|_2^2 && (1.21)\\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\|A\boldsymbol{e}_j\|_2^2}{\|\boldsymbol{e}_j\|_2^2} && (1.22)\\
&\leqslant \sum_{j=1}^n \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2^2}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2} = \sum_{j=1}^n |||A|||^2 = n|||A|||^2, && (1.23)
\end{aligned}
$$

donc, $\|A\|_F \leqslant \sqrt{n}|||A|||$.

Exercice 2.

Soient $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

1) On effectue le changement de variable suivant :

$$F(u,v) = f\Big(\frac{u+v}{2a}, \frac{u-v}{2}\Big) \tag{2.1}$$

Calculer $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, où x et y représentent respectivement la première et la seconde variable de f.

2) Montrer que si f vérifie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \tag{2.2}$$

alors il existe $g, h \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $f(x,y) = g(ax+y) + h(ax-y)$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution

1) On utilise la formule des dérivées composées :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2a}\frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{u+v}{2a}, \frac{u-v}{2}\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\Big(\frac{u+v}{2a}, \frac{u-v}{2}\Big) \; ; \tag{2.3}$$

de même,

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{2a}\frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{u+v}{2a}, \frac{u-v}{2}\Big) + \frac{-1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\Big(\frac{u+v}{2a}, \frac{u-v}{2}\Big). \tag{2.4}$$

Enfin,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2a}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{-1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{-1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{4a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \tag{2.6}$$

où F et ses dérivées partielles d'ordres 1 et 2 sont évaluées en (u,v), et où f et ses dérivées partielles d'ordres 1 et 2 sont évaluées en $((u+v)/(2a), (u-v)/2)$.

2) On effectue le changement de variable précédent. On obtient alors

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4a^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{2.7}$$

En intégrant (2.7) par rapport à la première variable de F, on trouve qu'il existe une fonction α telle que, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \alpha(v). \tag{2.8}$$

Comme $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$, alors $F \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et $\alpha \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$.
En intégrant (2.8) par rapport à la deuxième variable de F, on trouve qu'il existe une fonction g telle que, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $F(u,v) = g(u) + h(v)$, avec h une primitive quelconque de α. Puisque F, h sont de classe C^2, g aussi. Finalement u et v sont exprimées comme fonctions de x et y.

Exercice 3.

Écrire le développement limité à l'ordre 3 et au point $(1,1)$ de la fonction

$$f = (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{xy},$$

en utilisant le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u$ en 0.

Indication. Écrire $f(x,y) = \mathrm{e}^{1+u}$, où $u := (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$. Justifier toutes les étapes.

Solution

D'après la formule de Taylor en dimension 1, $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^u = \mathrm{e} + \mathrm{e}u + \frac{1}{2}\mathrm{e}u^2 + \frac{1}{6}\mathrm{e}u^3 + g(u) \tag{3.1}$$

avec $g(u) = o(|u|^3)$ et $g(0) = 0$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, écrivons $x =: 1 + a$ et $y =: 1 + b$. Considérons la norme euclidienne, et utilisons $g(u) = o(|u|^3)$. Soit $\epsilon > 0$; si $a + b + ab \neq 0$,

$$\frac{|g(a+b+ab)|}{\|(a,b)\|^3} = \frac{|g(a+b+ab)|}{|a+b+ab|^3} \times \frac{|a+b+ab|^3}{\|(a,b)\|^3} \leqslant \frac{|g(a+b+ab)|}{|a+b+ab|^3}(1+1+\|(a,b)\|)^3 \leqslant \epsilon, \quad (3.2)$$

si $\|(a,b)\|$ est suffisamment petit. Cette conclusion reste valable si $a+b+ab = 0$, avec $(a,b) \neq (0,0)$. Ainsi $g(a+b+ab) = o(\|(a,b)\|^3)$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{xy} &= \mathrm{e}^{(1+a)(1+b)} && (3.3)\\
&= \mathrm{e}^{1+a+b+ab} && (3.4)\\
&= \mathrm{e} + \mathrm{e}(a+b+ab) + \frac{1}{2}\mathrm{e}(a+b+ab)^2 + \frac{1}{6}\mathrm{e}(a+b+ab)^3 + g(a+b+ab) && (3.5)\\
&= \mathrm{e} + \mathrm{e}(a+b+ab) + \frac{1}{2}\mathrm{e}(a^2+b^2+2ab+2a^2b+2ab^2) \\
&\qquad + \frac{1}{6}\mathrm{e}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) + o(\|(a,b)\|^3) && (3.6)\\
&= \mathrm{e} + \mathrm{e}(a+b) + \frac{1}{2}\mathrm{e}(a^2+b^2+4ab) + \frac{1}{6}\mathrm{e}(a^3+9a^2b+9ab^2+b^3) + o(\|(a,b)\|^3) && (3.7)\\
&= \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e}(y-1) + \mathrm{e}\frac{(x-1)^2}{2} + \mathrm{e}\frac{(y-1)^2}{2} && (3.8)\\
&\quad + 2\mathrm{e}(x-1)(y-1) + \mathrm{e}\frac{3}{2}(x-1)^2(y-1) + \mathrm{e}\frac{3}{2}(y-1)^2(x-1) \\
&\qquad + \mathrm{e}\frac{(x-1)^3}{6} + \mathrm{e}\frac{(y-1)^3}{6} + o(\|(x,y)-(1,1)\|^3).
\end{aligned}$$

Le polynôme de Taylor d'ordre 3 de f au point $(1,1)$ est donc

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e}(y-1) + \mathrm{e}\frac{(x-1)^2}{2} + \mathrm{e}\frac{(y-1)^2}{2} + 2\mathrm{e}(x-1)(y-1) \\
&\quad + \mathrm{e}\frac{3}{2}(x-1)^2(y-1) + \mathrm{e}\frac{3}{2}(y-1)^2(x-1) + \mathrm{e}\frac{(x-1)^3}{6} + \mathrm{e}\frac{(y-1)^3}{6}. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = \left((x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2\right)^{1/2}.$$

Écrire le polynôme de Taylor de degré 2 de f en $(0,0,0)$.

Solution

La fonction f est de classe C^2 sur un ouvert contenant $\mathbf{0}$. Par exemple $f \in \mathrm{C}^2(\mathrm{B}(\mathbf{0}, r))$ avec $r \in \,]0, \sqrt{14}[$ puisque $\|\mathbf{0} - (1,2,3)\| = \sqrt{14}$. En fait, elle est même infiniment dérivable sur cette boule. D'après le cours, le polynôme demandé est donc

$$p : \boldsymbol{x} \mapsto \sum_{0 \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant 2} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{0}) \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (4.1)$$

Cette somme inclut les termes suivants :

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{\alpha}| = 0, && \boldsymbol{\alpha} = (0,0,0), && \boldsymbol{\alpha}! = 1\ ; && (4.2)\\
&|\boldsymbol{\alpha}| = 1, && \boldsymbol{\alpha} = (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1), && \boldsymbol{\alpha}! = 1\ ; && (4.3)\\
&|\boldsymbol{\alpha}| = 2, && \boldsymbol{\alpha} = (2,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,2), && \boldsymbol{\alpha}! = 2\ ; && (4.4)\\
&|\boldsymbol{\alpha}| = 2, && \boldsymbol{\alpha} = (0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0), && \boldsymbol{\alpha}! = 1. && (4.5)
\end{aligned}
$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathrm{B}(\mathbf{0}, r)$. Calculons les dérivées partielles de f en $\boldsymbol{x}$ jusqu'à l'ordre 2. Pour tout $i, j \in \{1,2,3\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = (x_i - i)\frac{1}{f(\boldsymbol{x})}\ ; \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\delta_{ij}}{f(\boldsymbol{x})} - (x_i - i)(x_j - j)\frac{1}{f^3(\boldsymbol{x})}. \tag{4.7}$$

Évaluons ces dérivées partielles au point $\mathbf{0}$: $f(\mathbf{0}) = \sqrt{14}$ et, pour tout $i, j \in \{1,2,3\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) = \frac{-i}{\sqrt{14}}\ ; \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0}) = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{14}} - \frac{ij}{14\sqrt{14}}. \tag{4.9}$$

On obtient alors l'expression de p :

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{x}) &= f(\mathbf{0}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0})x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{0})x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{0})x_3 && (4.10)\\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{0})x_1x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(\mathbf{0})x_1x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\mathbf{0})x_2x_3\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{0})x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{0})x_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(\mathbf{0})x_3^2\right)\\
&= \sqrt{14} - \frac{1}{\sqrt{14}}(x_1 + 2x_2 + 3x_3) - \frac{1}{14\sqrt{14}}(2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 6x_2x_3) && (4.11)\\
&\qquad + \frac{1}{28\sqrt{14}}(13x_1^2 + 10x_2^2 + 5x_3^2).
\end{aligned}
$$