Entraînement à l'examen, Analyse Avancéee II - Section de Maths

Printemps 2025. Durée : 3 heures et 30 minutes

EPFL

Entraînement à l'examen

SCIPER : **SCIPER** Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient ... pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  $+3$ points si la réponse est correcte,

  0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,

  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

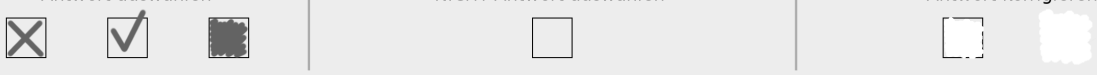
  $+1$ point si la réponse est correcte,

  0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,

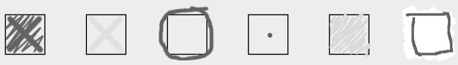
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren



ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 Soit la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \ln\Big(4 - (x+y)^2\Big),$$

où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $f(x,y)$ est bien définie. Alors

- ☐ l'ensemble D n'est ni fermé, ni borné
- ☐ l'ensemble D est borné, mais pas fermé
- ☐ l'ensemble D est fermé, mais pas borné
- ☐ l'ensemble D est fermé et borné

Question 2 Considérer les deux limites suivantes :

$$(A) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\,, \qquad\qquad (B) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^4+y^8}\,.$$

Alors

- ☐ les deux limites n'existent pas
- ☐ les deux limites existent
- ☐ la limite (B) existe mais la limite (A) n'existe pas
- ☐ la limite (A) existe mais la limite (B) n'existe pas

Question 3 Soient $D = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ u+v \neq 0\big\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(u,v) = \ln\left(u^2 + 2uv + v^2\right).$$

Soit $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to D$ un fonction différentiable telle que $\boldsymbol{g}(0,3) = (0,-3)$ et

$$D\boldsymbol{g}(0,3) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

où $D\boldsymbol{g}$ est la matrice jacobienne de $\boldsymbol{g}$. Si $h = f \circ \boldsymbol{g}$, alors

- ☐ $\nabla h(0,3) = (0,0)^\top$
- ☐ $\nabla h(0,3) = (0,6)^\top$
- ☐ $\nabla h(0,3) = (6,0)^\top$
- ☐ $\nabla h(0,3) = (8,-2)^\top$

Question 4 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alors

- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est continue en $(0,0)$, mais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existent pas

Question 5 Soit

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad \boldsymbol{f}(x,y,z) \quad = \begin{pmatrix} 2(x^2+y^2)-z^2 \\ x+y+z-2 \end{pmatrix}$$

et l'équation $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, dont une solution est $P = (1,-1,2)$.
Alors, l'équation $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \mathbf{0}$ définit implicitement autour de P

- ☐ une fonction $z = \phi(x,y)$ telle que $\partial_x \phi(1,-1) = 1$, $\partial_y \phi(1,-1) = -1$.
- ☐ deux fonctions $x = \phi_1(y)$, $z = \phi_2(y)$ telles que $\phi_1'(-1) = 0$, $\phi_2'(-1) = -1$
- ☐ deux fonctions $x = \phi_1(z)$, $y = \phi_2(z)$ telles que $\phi_1'(2) = 20$, $\phi_2'(2) = 3$
- ☐ deux fonctions $y = \phi_1(x)$, $z = \phi_2(x)$ telles que $\phi_1'(1) = \phi_2'(1) = 0$

Question 6 Pour toute fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)\,dx \right) dy$$

est égale à

- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_{\sqrt{2-x^2}}^{-x^2} f(x,y)\,dy \right) dx$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$

Question 7 Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ le sous-ensemble délimité par les quatre plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$. Alors l'intégrale

$$\int_D \sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

vaut

- ☐ $\frac{1}{2}\cos(1) + \sin(1) - 1$
- ☐ 1
- ☐ $\sin(1) + 1$
- ☐ $\frac{1}{2}\cos(1)$

Question 8 Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie l'équation différentielle

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

avec $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$, alors

- ☐ $u(-1) = e^{-1} - e^2 + \frac{1}{2}e^{-1}$
- ☐ $u(-1) = -\frac{1}{2}e - e^{-1}$
- ☐ $u(-1) = \frac{5}{2}e$
- ☐ $u(-1) = \frac{1}{2}e$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé. Vos réponses doivent être soigneusement justifiées et toutes les étapes de votre raisonnement doivent y figurer. Les résultats vus au cours et exercices peuvent être utilisés sans les prouver, pourvu qu'ils soient clairement énoncés, de même la théorie vue au cours d'Analyse I.

Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Tourner les pages ! Cette partie contient 5 questions !

Question 9: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

Soit $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0\right\}$, et soit $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x \sin\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.

(a) Discuter la continuité et la différentiabilité de f en tout point $(x,y) \in E$.

(b) Determiner l'ensemble $\Gamma \subset \partial E$ des points frontière de E où la fonction f peut etre prolongée par continuité.

(c) Soit $\tilde{f} : F = E \cup \Gamma \to \mathbb{R}$ le prolongement par continuité de f. Discuter la différentiabilité de $\tilde{f}$ en tout point $(x,y) \in \mathring{F}$.

Question 10 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$, $\delta \in]0, +\infty[$ et $f : \overline{B}(\boldsymbol{a}, \delta) \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{B}(\boldsymbol{a}, \delta)$ et de classe C^2 sur $B(\boldsymbol{a}, \delta)$.

(a) Supposons que

$$\forall (x, y) \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) > 0.$$

Prouver qu'il n'existe aucun point dans $B(\boldsymbol{a}, \delta)$ en lequel f atteint un maximum local.

(b) En supposant maintenant que

$$\forall (x, y) \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \geq 0,$$

prouver qu'il existe un point dans $\partial B(\boldsymbol{a}, \delta)$ en lequel $f : \overline{B}(\boldsymbol{a}, \delta) \to \mathbb{R}$ atteint un maximum global.

Indication. Appliquer, pour $\epsilon > 0$, le résultat du point (a) à la fonction $\widetilde{f}_\epsilon$ définie par $\widetilde{f}_\epsilon(x, y) = f(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2)$.

Question 11 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^x e^{xy^2}\, dy.$$

Calculer ses dérivées successives jusqu'à l'ordre 4.
En déduire le polynôme de Taylor d'ordre 4 de f au point 0.

Question 12 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Définissons les fonctions $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z, \qquad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad h(x, y, z) = x + 3z - 2.$$

Calculer

$$\min\left\{f(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3,\ g(\boldsymbol{v}) = 0,\ h(\boldsymbol{v}) = 0\right\}$$

ainsi que le maximum.

Question 13: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

On considère l'équation différentielle ordinaire

$$u'(t) = 2u(t) + \sin(t)u(t)^p \tag{1}$$

avec $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$.

(a) Montrer que les solutions non-nulles de (1) sont soit toujours positives, soit toujours négatives.

(b) En utilisant le changement de variable $z(t) = \dfrac{1}{u(t)^{p-1}}$, trouver l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$ et calculer sa solution générale.

(c) Trouver la solution générale de (1).

Troisième partie, preuves

Rédiger les preuves dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.

Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Tourner les pages ! Cette partie contient 2 questions !

Question 14 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

Rédiger la preuve vue au cours du théorème suivant.
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec E ouvert non vide. Fixons $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Si

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

existent sur tout E et si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

sont continues en un certain $\boldsymbol{x} \in E$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Question 15 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Rédiger la preuve vue au cours du théorème suivant.
Un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact (c'est-à-dire, fermé et borné) ssi toute suite $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ admet une sous-suite qui converge vers un élément de E.