

Série 20 du mercredi 14 mai 2025

Exercice à rendre 1.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'hypothèse de croissance linéaire

$$\exists M \in]0, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq M(1 + |x|). \quad (1)$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $u \in C^1([a, b[)$ telle que

$$\forall t \in [a, b[, \quad u'(t) = f(u(t)). \quad (2)$$

Montrer soigneusement l'existence de $\lim_{t \rightarrow b^-} u(t)$.

Indication. Montrer que u est uniformément continue sur $[a, b[$. Il peut être utile d'employer le lemme de Grönwall et l'inégalité $2|xy| \leq x^2 + y^2$.