Série 16 du mercredi 9 avril 2025

Exercice à rendre 1.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ fermé et non-borné. Soit $f \in C^0(E, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = +\infty$, i.e. $\forall c \in]0, +\infty[,\ \exists M \in]0, +\infty[,\ \forall \boldsymbol{x} \in E, \quad \|\boldsymbol{x}\| \geqslant M \implies f(\boldsymbol{x}) \geqslant c$.

1) Montrer que f admet un minimum global sur E.
2) Montrer que si E est convexe et f est strictement convexe, alors il existe un unique point où le minimum est atteint.
3) Montrer que si E est convexe et f est convexe, alors l'ensemble de tous les points de minimum de f est convexe.

Rappel 1. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est *convexe* si pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ et pour tout $\alpha \in [0, 1]$ on a

$$f(\alpha \boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{y}) \leqslant \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1 - \alpha) f(\boldsymbol{y}).$$

Si cette inégalité est stricte pour tous $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ et pour tout $\alpha \in]0, 1[$, alors f est *strictement convexe*.