Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Prof. Fabio Nobile

Semaine du 2025-03-24 au 2025-03-28

Série 11 du lundi 24 mars 2025

Exercice à rendre 1.

Définition 1 (Fonction à support compact)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction est dite « à support compact » si et seulement s'il existe un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ en dehors duquel f est nulle. Nous notons $\mathrm{C}^k_\mathrm{c}(\mathbb{R}^n)$ l'espace de fonctions $\mathrm{C}^k(\mathbb{R}^n)$ à support compact.

Définition 2 (Produit de convolution)**.** Soient f et g deux fonctions réelles. Si elle existe, on appelle « produit de convolution » – ou « convolution » – de f et g la fonction

$$(f * g) := x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Définition 3. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ bornée. On note

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in E\}. \tag{2}$$

$\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

Soient $f \in \mathrm{C}^0_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $f * g \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R})$.
2) Soit $g \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathbb{R})$, non négative, non nulle sur $[-1,1]$ et nulle en dehors de $[-1,1]$.[1] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons

$$g_n(x) := \frac{ng(nx)}{\int_\mathbb{R} g}. \tag{4}$$

Notons que g_n est nulle en dehors de $[-1/n, 1/n]$ et $\int_\mathbb{R} g_n = 1$. Montrer que $f_n := f * g_n \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathbb{R})$, et que $\forall \epsilon \in \,]0,+\infty[$, $\exists n^* \in \mathbb{N}^* : \forall n \geqslant n^*$, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \epsilon$. On dit dans ce cas que f_n converge uniformément vers f lorsque $n \to \infty$.

Indication. Nous pouvons écrire $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_n(t)dt$ grâce au fait que $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = 1$.

1. Un exemple commun de fonction satisfaisant les hypothèses de cet exercice est

$$g := x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } x \in \,]-1,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$