Démonstration alternative du Théorème de Cauchy-Lipschitz version globale. La démonstration est très similaire à celle du théorème 9.28 de Cauchy-Lipschitz local.

i) On va d'abord montrer qu'il existe une solution sur tout sous-intervalle fermé et borné de I contenant t_0 dans son intérieur. Soit $J \subset I$ compact tel que $t_0 \in \mathring{J}$, $L > \max_{t\in J} \ell(t)$ et $J_0 = [t_0 - \frac{1}{2L}, t_0 + \frac{1}{2L}] \cap J$. Alors, l'application $\phi : C^0(J_0, \mathbb{R}^n) \to C^0(J_0, \mathbb{R}^n)$ définie par $\phi(\mathbf{v})(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s))ds$, $t \in J_0$, est contractante. En effet, pour tout $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in C^0(J_0, \mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}\max_{t\in J_0} \|\phi(\mathbf{v}_1)(t) - \phi(\mathbf{v}_2)(t)\| &\leq \max_{t\in J_0} \left| \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{v}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v}_2(s))\| ds \right| \\ &\leq \max_{t\in J_0} \left| \int_{t_0}^t \ell(s) \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\| ds \right| \leq \frac{1}{2} \max_{t\in J_0} \|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)\|.\end{aligned}$$

Par le théorème de point fixe de Banach on a alors une fonction $\mathbf{u}^{(0)} \in C^0(J_0, \mathbb{R}^n)$ point fixe de ϕ qui est, en particulier, de classe C^1 et solution du problème de Cauchy sur J_0. Si $J_0 = J$ on a terminé. Si J_0 est strictement inclus dans J, supposons $t_1 = t_0 + \frac{1}{2L} \in \mathring{J}$ (l'argument est identique si $t_{-1} = t_0 - \frac{1}{2L} \in \mathring{J}$) et considérons le problème de Cauchy avec donnée initiale $(t_1, \mathbf{u}_1)$, avec $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}^{(0)}(t_1)$. Par le même raisonnement que ci dessus, on montre l'existence d'une solution $\mathbf{u}^{(1)} : J_1 \to \mathbb{R}^n$ de ce problème de Cauchy sur l'intervalle $J_1 = [t_1 - \frac{1}{2L}, t_1 + \frac{1}{2L}] \cap J$. On peut donc définir la solution $\mathbf{u} : J_0 \cup J_1 \to \mathbb{R}^n$ par $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{(0)}(t)$, $t \in J_0$, et $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{(1)}(t)$, $t \in J_1 \setminus J_0$, qui est bien de classe C^1 et solution du problème de Cauchy $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$ sur $J_0 \cup J_1$ (par une vérification directe dans l'esprit du Lemme 9.6). On itère alors le raisonnement. Soit $J_n = [t_0 + \frac{n-1}{2L}, t_0 + \frac{n+1}{2L}] \cap J$, $n \in \mathbb{Z}$; puisque J est borné il existe un nombre fini d'intervalles d'intérieurs non vides $J_n, n \in \{-M, \ldots, N\}$ $(M, N \geq 0)$ qui recouvrent J, i.e. $J \subset J_{-M} \cup J_{-M+1} \cup \cdots \cup J_{N-1} \cup J_N$ et une solution $\mathbf{u} : J \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 solution du problème de Cauchy $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$ sur J.

ii) Au point précédent, on a construit une solution du problème de Cauchy sur tout intervalle compact $J \subset I$ tel que $t_0 \in \mathring{J}$. Grâce au Lemme 9.31, cette solution est même unique sur J.

Soit maintenant $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles compacts telle que $t_0 \in \mathring{J}_0$, $J_k \subset J_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $I = \cup_{k\in\mathbb{N}} J_k$. Notons, de plus $\mathbf{u}_k : J_k \to \mathbb{R}^k$ l'unique solution du problème de Cauchy sur J_k. L'unicité des solutions entraîne que $\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t)$, $\forall t \in J_k$. On construit alors la solution globale $\mathbf{u} : I \to \mathbb{R}^n$ par $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k(t)$ si $t \in J_k$ (voir aussi la construction de la solution maximale dans la démonstration du théorème 9.32). De nouveau grâce au Lemme 9.31, cette solution globale est unique.

□