Prof. L. Chizat
Analyse I - (n/a)
15 janvier 2024
3h30

CATALOGUE

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [SCQ-induction-A] : Soit $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = (x+1)\sin(x) + \cos(x) + e^{\sin(x)}.$$

Alors, l'ensemble image de f est

■ $[0, 1 + \frac{\pi}{2} + e]$ ☐ $[0, 2]$ ☐ $[\pi - 2, 2]$ ☐ $[0, 2 + \pi + e]$

Question [SCQ-inf-sup-C] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, et soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Alors :

☐ $\operatorname{Inf} A = -1$ et $\operatorname{Sup} A = 1$ ☐ $\operatorname{Inf} A = 0$ et $\operatorname{Sup} A = \frac{3}{2}$

☐ $\operatorname{Inf} A = 0$ et $\operatorname{Sup} A = 1$ ■ $\operatorname{Inf} A = -1$ et $\operatorname{Sup} A = \frac{3}{2}$

Question [SCQ-complexes-B] : Une des solutions de l'équation $z^5 = \left(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2$ est

■ $z = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$ ☐ $z = \sqrt[5]{2}\,\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$

☐ $z = \sqrt[5]{4}\,\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$ ☐ $z = \sqrt[5]{2}\,\left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$

Question [SCQ-suites-convergence-B] : Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$x_n = \left(\cos\left(\sqrt{\tfrac{2}{n}}\,\right)\right)^n.$$

Alors la limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ vaut

■ $\dfrac{1}{e}$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ e

Question [SCQ-suites-recurrence-B] : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = -\frac{2}{3}u_{n-1} + 2$. Alors :

■ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{6}{5}$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

Catalogue

Question [`SCQ-serie-A`] : Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \dfrac{k+2}{k^3}$ et soit $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Alors :

- [x] la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument
- [ ] la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument
- [ ] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$
- [ ] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$

Question [`SCQ-limsup-liminf-B`] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{n}\,.$$

Alors :

- [x] $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ et $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$
- [ ] $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n = -\tfrac{1}{4}$ et $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = \tfrac{3}{2}$
- [ ] $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ et $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = \tfrac{3}{2}$
- [ ] $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n = \tfrac{3}{4}$ et $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n = \tfrac{7}{2}$

Question [`SCQ-parametre-A`] : Soit la série avec paramètre $x \in \,]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$ définie par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mathrm{Log}(x))^n}\,.$$

Alors la série converge si et seulement si

- [ ] $x \in \,]\tfrac{1}{e},1[\, \cup \,]1,e[$
- [ ] $x \in \,]e,+\infty[$
- [ ] $x \in \,]0,\tfrac{1}{e}[$
- [x] $x \in \,]0,\tfrac{1}{e}[\, \cup \,]e,+\infty[$

Question [`SCQ-limit-prolongmt-B`] : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \left|4 - x^2\right| & \text{si } x \leq 0\,, \\ 4\left|x^2 - 1\right| & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- [x] f est continue sur $\mathbb{R}$
- [ ] f n'est pas continue en $x = -2$
- [ ] f n'est pas continue en $x = 0$
- [ ] f n'est pas continue en $x = 1$

Catalogue

Question [`SCQ-val-intermed-image-interv-B`] **:** Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble image de f. Parmi les affirmations ci-dessous, laquelle est vraie pour tous les choix possibles de I et de f ?

- [ ] Si I est borné et si $\mathrm{Im}(f)$ est borné, alors f est continue sur I.
- [ ] Si I est borné et si $\mathrm{Im}(f)$ est fermé et si f est continue sur I, alors I est fermé.
- [x] Si I est fermé et borné et si $\mathrm{Im}(f)$ est ouvert, alors f n'est pas continue sur I.
- [ ] Si I est fermé et borné et si $\mathrm{Im}(f)$ est fermé, alors f est continue sur I.

Question [`SCQ-cont-vs-derivab-C`] **:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{|x|} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- [x] f est dérivable à droite en $x = 0$
- [ ] $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe mais f n'est pas continue en $x = 0$
- [ ] f est dérivable en $x = 0$
- [ ] f est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en $x = 0$

Question [`SCQ-contin-deriv-C1-B`] **:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- [x] $f'(0) = \frac{1}{2}$
- [ ] $f'(0) = 1$
- [ ] f n'est pas dérivable en 0
- [ ] $f'(0) = e$

Question [`SCQ-theo-accr-finis-A`] **:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2^x + x^2$. Alors :

- [x] il existe $c \in \,]2,3[$ tel que $f'(c) = 9$
- [ ] il existe $c \in \,]0,1[$ tel que $f'(c) = 9$
- [ ] il existe $c \in \,]3,4[$ tel que $f'(c) = 9$
- [ ] il existe $c \in \,]1,2[$ tel que $f'(c) = 9$

Question [`SCQ-dev-limite-A`] **:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{1+x-\cos(x)}$. Le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ est donné par

- [x] $f(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$
- [ ] $f(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$
- [ ] $f(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$
- [ ] $f(x) = 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

Catalogue

Question [`SCQ-serie-entiere-B`] : L'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$$

est

■ $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right[$ ☐ $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ ☐ $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ ☐ $\left]\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right[$

Question [`SCQ-integrale-first-B`] : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ vaut

■ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ 1 ☐ $2\operatorname{Arctg}(e)$ ☐ $\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Question [`SCQ-integrale-second-A`] : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x$ vaut

■ $\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$ ☐ 0 ☐ $\frac{2}{5}(e^{\pi}-1)$ ☐ $e^{\pi}-1$

Question [`SCQ-int-generalisee-B`] : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ vaut

■ $\operatorname{Log}\left(\dfrac{3}{2}\right)$ ☐ $\operatorname{Log}(6)$ ☐ $\operatorname{Log}\left(\dfrac{4}{3}\right)$ ☐ $\operatorname{Log}\left(\dfrac{3}{8}\right)$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [`TF-inf-sup-A`] **:** Soient A et B deux sous-ensembles bornés non-vides de $\mathbb{R}$. Si $\operatorname{Inf} A > \operatorname{Sup} B$, alors $A \cap B$ est vide.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-complexes-B`] **:** Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = 0$. Alors $\operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2) = 0$.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-induction-suites-limites-B`] **:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = f(a_{n-1})$. Alors $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-serie-B`] **:** Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres strictement négatifs. Alors, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si et seulement si elle converge.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-fonction-etc-B`] **:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors f est surjective.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-limite-continuite-A`] **:** Soit $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$, alors f est bornée.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-limites-continuite-B`] **:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que la limite de la suite $\big(f(\frac{1}{n})\big)_{n \geq 1}$ vaut $f(0)$. Alors f est continue en $x_0 = 0$.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-serie-entiere-A`] **:** Si la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-5)^k$ converge pour $x = 2$, alors elle converge pour $x = 6$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-dev-limite-B`] **:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction avec le développement limité d'ordre 2 autour de $x_0 = 0$ donné par $f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0 = 0$, alors $f'(0) = b$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-integrale-A`] **:** La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \int_0^t |x|\,\mathrm{d}x$ est dérivable en $t = 0$.

■ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8 *Réservé au correcteur*

(a) À l'aide d'un critère du cours, montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!}$$

converge.

(b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!} = 2 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) En déduire la valeur de la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!}.$$

Question 30: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ■ 3 *Réservé au correcteur*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et convexe. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - xf'(x)$$

est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$.

Catalogue

Question 31: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ■ 5 *Réservé au correcteur*

Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x^2 - x| + \frac{1}{2}x.$$

(a) Est-ce que f est dérivable en 1? Justifier.

(b) Déterminer, s'ils existent, les extrema locaux de f sur $[0,2]$.