Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.
Soit $a_n = \frac{3n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n}\right)$

Exercice 2.

Objectif: Critères de d'Alambert et de Cauchy (aka critère de la limsup)
Théorie nécessaire: Cours 3.48-3.49, Exemple 3.52

Discuter la convergence de la série géométrique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ en utilisant

(i) le critère de d'Alembert,
(ii) le critère de Cauchy.

Exercice 3.

Objectif: Démonstration par l'absurde et suites
Théorie nécessaire: Proposition 3.11 et Définition 3.14

Soit (a_n) une suite. Montrer par l'absurde que, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, alors la suite est divergente.

Exercice 4.

Objectif: Calcul de limites à l'aide de limites connues, des propriétés algébriques des suites et des critères de convergence
Théorie nécessaire: Exemple 3.9, §3.3

Déterminer, si elle existe, la limite des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ suivantes.

(i) $a_n = \frac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7}$ (iii) $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (v) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(ii) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$ (iv) $a_n = n \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)$ (vi) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Indication : on pourra utiliser, sans démonstration, que

- $\forall x > -1$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Exercice 5.

Objectif: Indéterminations de la forme $\infty - \infty$ et racines

En utilisant que

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

calculer les limites suivantes :

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+3}}{5}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+3} - \sqrt{(2n+1)(n+4)}$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^3+2n} - \sqrt{n^3+4})$

Indication : on pourra utiliser, sans démonstration, que si (x_n) est telle que pour tout n, $x_n \geq 0$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, alors $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{l}$. On le démontrera dans le Chapitre 5.

Exercice 6.

Objectif: Cas particulier de la définition $e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$

En sachant que la limite $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n .$$

Indication : montrer que $\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$

Exercice 7.
Soit (a_n) une suite numérique.
Vrai ou faux ?

Q1 : Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} (a_n \sin(n)) = 0$.

Q2 : Si $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) diverge.

Q3 : Si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$, alors (a_n) est une suite bornée.

Exercice 8.
Vrai ou faux ?

Q1 : Si une suite tend vers $-\infty$, alors son carré aussi.

Q2 : Si une suite tend vers $+\infty$, alors son carré aussi.

Q3 : Une suite qui ne tend pas vers $+\infty$ est bornée.

Q4 : Une suite divergente tend forcément vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Q5 : La suite $x_n = (-1)^n n$ tend vers $+\infty$.

Q6 : Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

Q7 : Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et $x_n \neq 0$ pour tout n, alors $(x_n)^{-1}$ tend vers $+\infty$.

Q8 : Une suite qui est à la fois croissante et décroissante est forcément constante.

Q9 : Si une suite tend vers $+\infty$, alors toutes ses sous-suites aussi.

Exercice 9.

Objectif: Calcul de limsup et liminf
Théorie nécessaire: Exemple 3.38

Pour les suites (x_n) suivantes, donner $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$ (*Utiliser l'exemple 3.38*).

(i) $x_n = \dfrac{1+(-2)^n}{2^n-1}$

(ii) $x_n = \dfrac{\cos(\pi n)}{\frac{1}{2}+\cos(\frac{\pi n}{2})}$

(iii) $x_n = \dfrac{\cos(\pi n)}{\sqrt{2}+\cos(\frac{\pi n}{4})}$

(iv) $x_n = \left(\dfrac{2n^2-2}{n^2+n}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi n}{3}\right) + \left(\dfrac{1-n^3}{4n^3+2}\right)(-1)^n$

(v) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Exercice 10.

◉ **Objectif:** Grammaire mathématique dans les preuves

Ci dessous une proposition et deux démonstration possibles. Laquelle des deux démonstration est correcte ?

Proposition.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite croissante. Alors, soit* (x_n) *converge, soit* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Démonstration. On distingue deux cas.
Cas 1 : (x_n) est majorée.
Par un résultat du cours, une suite majorée et croissante est convergente, ce qui est le résultat voulu.
Cas 2 : (x_n) n'est pas majorée.
Montrons dans ce cas que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, c-à-d $\forall M \geq 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $x_n \geq M$.
Soit donc $M \geq 0$.
Rappelons que par définition, (x_n) non-majorée est équivalent à quel que soit $M' \geq 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geq M'$.
Ainsi, par cette propriété pour $M' = M$, on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \geq M$. Montrons enfin par récurrence que

$$\forall n \geq N,\ x_n \geq M.$$

Pas de récurrence : Supposons que $n \geq N$ soit tel que $x_n \geq M$, et montrons que $x_{n+1} \geq M$.
Vu que (x_n) est croissante, on a

$$x_{n+1} \geq x_n \overset{\text{H.R.}}{\geq} M,$$

qui est le résultat voulu.
Initialisation : Si $n = N$, on a $x_n = x_N \geq M$ par définition de N.
Ainsi, par le principe de récurrence, on a que $\forall n \geq N$, $x_n \geq M$. Vu que M est quelconque, on a bien montré que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

qui est le résultat voulu.

□

Démonstration. On distingue deux cas.
Cas 1 : (x_n) est majorée.
Par un résultat du cours, une suite majorée et croissante est convergente, ce qui est le résultat voulu.
Cas 2 : (x_n) n'est pas majorée.
Montrons dans ce cas que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, c-à-d $\forall M \geq 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $x_n \geq M$.
Rappelons que par définition, (x_n) non-majorée est équivalent à $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geq M'$ et ce quelque soit $M' \geq 0$.
Ainsi, par cette propriété pour $M' = M$, on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \geq M$. Montrons enfin par récurrence que

$$\forall n \geq N,\ x_n \geq M.$$

Initialisation : Si $n = N$, on a $x_n = x_N \geq M$ par définition de N.
Pas de récurrence : Supposons que $n \geq N$ soit tel que $x_n \geq M$, et montrons que $x_{n+1} \geq M$.
Vu que (x_n) est croissante, on a

$$x_{n+1} \geq x_n \overset{\text{H.R.}}{\geq} M,$$

qui est le résultat voulu.
Ainsi, par le principe de récurrence, on a que $\forall n \geq N$, $x_n \geq M$. Vu que M est quelconque, on a bien montré que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

qui est le résultat voulu.

□

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 1 (i) 3

(ii) $\frac{1}{3}$

(iii) 2

Exercice 4 (i) $\frac{5}{3}$

(ii) $\frac{1}{2}$

(iii) 0

(iv) 0

(v) 0

(vi) 0

Exercice 5 (i) 0

(ii) 0

(iii) $-\frac{9\sqrt{2}}{4}$

(iv) 1

Exercice 6 e^2

Exercice 9 (i) $\limsup x_n = 1$, $\liminf x_n = -1$

(ii) $\limsup x_n = \frac{2}{3}$, $\liminf x_n = -2$

(iii) $\limsup x_n = 1 + \sqrt{2}$, $\liminf x_n = -\sqrt{2}$

(iv) $\limsup x_n = \sqrt{3} + \frac{1}{4}$, $\liminf x_n = -\sqrt{3} - \frac{1}{4}$

(v) $\limsup x_n = 0$, $\liminf x_n = 0$