EPFL – Automne 2024 | D. Strütt
Analyse I – SV | **Exercices**
Série 3 | 26 septembre 2024

Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

Objectif: Démonstrations par récurrence, induction
Théorie nécessaire: Cours 0.58-0.59

On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots n$. Montrer *par récurrence* que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Exercice 2.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2.$$

Exercice 3.

Objectif: Développer des stratégies qui permettent de retrouver les valeurs du sinus et cosinus qui sont à savoir dans l'examen
Théorie nécessaire: Cours 0.49-0.50

(i) En étudiant un triangle isocèle ABC rectangle en C de côtés $AB = \sqrt{2}$, $AC = 1$ et $BC = 1$, déterminer les valeurs de $\sin(\pi/4)$, $\cos(\pi/4)$ et $\tan(\pi/4)$.

(ii) En étudiant un triangle équilatéral de côté 1 et hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ déterminer les valeurs de $\sin(\pi/6)$, $\sin(\pi/3)$, $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/3)$, $\tan(\pi/6)$ et $\tan(\pi/3)$.

(iii) De combien de triangles faut-il se rappeler pour retrouver toutes les valeurs du sinus et cosinus qu'il faut savoir à l'examen ? (Voir Résultats trigonométriques à connaître pour l'examen sur moodle)

Exercice 4.

Objectif: Fonctions injectives, surjectives, premiers pas
Théorie nécessaire: Cours 0.31-0.38

Soit $X = \{0, 1\}$ et $f, g \colon X \to X$ deux fonctions.
Vrai ou faux ?

Q1 : $f \circ g = g \circ f \quad \Leftrightarrow \quad f = g$.

Q2 : Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.

Q3 : Si $f \circ f$ est injective, alors f est injective.

Q4 : Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

Q5 : Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

Exercice 5.

> **Objectif:** Fonctions injectives, surjectives, démonstrations
> **Théorie nécessaire:** Cours 0.31-0.38

On note $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 0\}$.
Montrer que la fonction $f \colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \sqrt{-x}$$

est bijective.

Exercice 6.

> **Objectif:** Fonctions injectives, surjectives, démonstrations
> **Théorie nécessaire:** Cours 0.31-0.38

Montrer que la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0, \\ 2(-n) - 1 & \text{si } n < 0. \end{cases} \end{array}$$

est bijective.

Exercice 7.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (somme de carrés d'entiers) ;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ (somme alternée de carrés d'entiers) ;

Calculer $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2)$.

Exercice 8.

> **Objectif:** Récurrence, plus difficile
> **Théorie nécessaire:** Cours 0.58-0.59

Pour $n, k \in \mathbb{N}$ des entiers avec $0 \leq k \leq n$ on définit par $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial. On rappelle que par convention $0! = 1$.

(i) Montrer *l'identité de Pascal*, c'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k$ tel que $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

par un calcul direct.

(ii) Montrer, par récurrence et en utilisant le point précédent que, que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} \text{ est un entier.}$$

Exercice 9.
Ceci est un exercice sur la formule du binome de Newton.

(*i*) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(*ii*) En déduire que, pour tout entier n, on a

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Exercice 10.

Objectif: Propriétés algébrique de base des rationnels et irrationnels
Théorie nécessaire: Cours 0.13-0.14

Vrai ou faux ?

Q1 : La somme de deux rationnels est rationnelle.
Q2 : La somme de deux irrationnels est irrationnelle.
Q3 : La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnelle.
Q4 : Le produit de deux rationnels est rationnel.
Q5 : Le produit de deux irrationnels est irrationnel.
Q6 : Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnel.

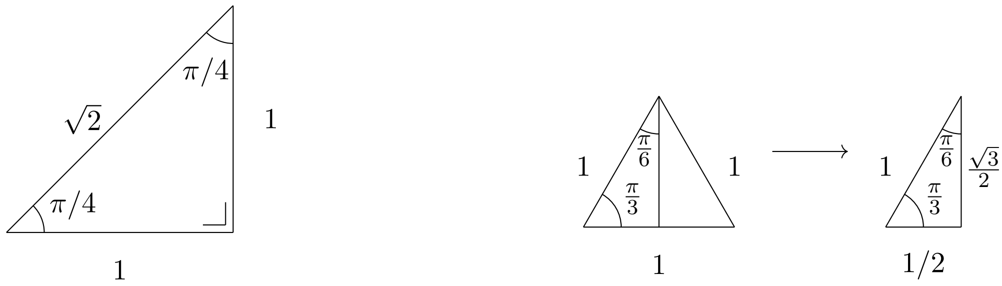
Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 1, 2 Au moment de poser le problème ($n = 0$, n et $n+1$) avez vous réfléchi plus qu'un scanner ?

Exercice 3 (*i*) $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\tan(\pi/4) = 1$

(*ii*) $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$, $\sin(\pi/6) = 1/2$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$.

(*iii*) Deux (ou trois selon comment on compte dans la figure de droite) :



Exercice 5 Avez vous rédigé une démonstration comme dans les exemples faits en cours ? Avez vous respecté la grammaire mathématique dans votre démonstration ?