Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.
Déterminer le développement limité d'ordre 3 des fonctions f suivantes autour de $x_0 = 0$.

(*i*) $f(x) = \sin(3x)$ (*ii*) $f(x) = \log(2 + x)$

Exercice 2.
Trouver le développement limité d'ordre n autour de $x_0 = 0$ de fonctions f suivantes :

(*i*) $f(x) = \log(\cos(x))$ $(n = 4)$
(*ii*) $f(x) = e^{\sin(x)}$ $(n = 4)$
(*iii*) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$ $(n = 3)$

Exercice 3.

Objectif: Calcul de limites à l'aide des développements limités
Théorie nécessaire: Exemple 8.12

En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

(*i*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)\right)$

(*ii*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \log(1 + x)}$

(*iii*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

Exercice 4.
Calculer le développement limité d'ordre 4 autour de $x_0 = \frac{\pi}{3}$ de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)} \ .$$

Remarque.
L'idée n'est pas de dériver la fonction donnée, mais de se baser sur des développements limités (DL) autour de 0 qui sont bien connus.

Exercice 5.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\cos(x)-1)-\cos(\sin(x))+1}{x^4} & \text{pour } x \neq 0\,, \\ c & \text{pour } x = 0\,. \end{cases}$$

Quelle est la valeur de $c \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue en $x = 0$?

- ☐ 0
- ☐ $-\dfrac{1}{6}$
- ☐ $\dfrac{1}{2}$
- ☐ $\dfrac{1}{4}$

Exercice 6.
Soient $b, c \in \mathbb{R}$, $I =]-1,1[$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = bx + cx^2 + o(|x|^4)$.
Vrai ou Faux ?

Q1 : f est continue en $x = 0$.

Q2 : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = b$.

Q3 : f est dérivable en $x = 0$.

Q4 : $f \in C^1(I)$.

Q5 : Si $f \in C^2(I)$, alors $f''(0) = c$.

Q6 : $f(x)^2 = b^2x^2 + c^2x^4 + o(|x|^6)$.

Exercice 7.
Trouver les séries de Taylor des fonctions f suivantes et déterminer un intervalle où f est égale à sa série de Taylor :

(*i*) $f(x) = \sin(x)$
(*ii*) $f(x) = \cos(x)$
(*iii*) $f(x) = e^x$
(*iv*) $f(x) = e^{-x}$
(*v*) $f(x) = \sinh(x)$
(*vi*) $f(x) = \cosh(x)$
(*vii*) $f(x) = \log(1+x)$
(*viii*) $f(x) = \log(1-x)$

Exercice 8.

> **Objectif:** Propriétés quantitatives du reste dans le développement limité
> **Théorie nécessaire:** Formule de Taylor (thm 8.3)

Soit $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.
En utilisant la formule de Taylor, montrer que si on remplace f par le polynôme de son développement limité d'ordre 15 autour de 0, c'est-à-dire si on remplace f par

$$\sum_{k=0}^{15} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

l'erreur qu'on commet est plus petite que 10^{-8}.
Indication : utiliser le fait que

$$\frac{2^{16}}{16!} < 10^{-8}.$$

Exercice 9.

Objectif: Fonctions convexes
Théorie nécessaire: Caractérisation des fonctions convexes

Pour les fonctions suivantes, déterminer si elles sont convexes ou concaves et justifier la réponse.

(*i*) $f\colon [-3,-1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$.

(*ii*) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^4}{2} + 14x$.

(*iii*) $f\colon \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x)$.

(*iv*) $f\colon\ ]-1,+\infty] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

(*v*) $f\colon]-\infty,-1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Exercice 10.
Donner les développements limités d'ordre 2 des fonctions f suivantes autour de x_0. Le but de cet exercice est d'utiliser les développements de fonctions connues et d'utiliser des feintes du loup™ et des feintes du bison™.

(*i*) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\quad (x_0 = 3)$

(*ii*) $f(x) = e^x$ $\quad (x_0 = 2)$

(*iii*) $f(x) = \log(3+x)$ $\quad (x_0 = 0)$

(*iv*) $f(x) = \dfrac{1}{3x-5}$ $\quad (x_0 = 1)$

(*v*) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ $\quad (x_0 = 1)$

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 1 (i) $3x - \frac{9}{2}x^3 + o(|x|^3)$

(ii) $\log(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(|x|^3)$

Exercice 2 (i) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(|x|^4)$

(ii) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(|x|^4)$

(iii) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(|x|^3)$

Exercice 3 (i) $-\frac{1}{120}$

(ii) 2

(iii) $\frac{1}{18}$

Exercice 4 $\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{13}{108}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right)$

Exercice 5 $-\frac{1}{6}$

Exercice 7 (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n$

(v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

(vi) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$

(vii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$

$(viii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}x^n$

Exercice 10 (i) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{8}(x-3)^2 + o(|x-3|^2)$

(ii) $e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + o(|x-2|^2)$

(iii) $\log(3) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{18}x^2 + o(|x|^2)$

(iv) $-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x-1) - \frac{9}{8}(x-1)^2 + o(|x-1|^2)$

(v) $\frac{1}{5} - \frac{3}{25}(x-1) + \frac{9}{125}(x-1)^2 + o(|x-1|^2)$