Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

Objectif: Utilisation théorique du TVI

Soient $a < b$ et $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f est surjective.

Exercice 2.

Objectif: Changement de variable dans les limites

La limite

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{2}{x^2}}\left(\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)-1\right)\right)$$

est égale à

- ☐ 0
- ☐ e^2
- ☐ $+\infty$
- ☒ $-\dfrac{1}{2}$

Exercice 3.

Objectif: Application du TAF à l'étude de fonction

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]\subset D(f)$ (avec $a<b$) et dérivable sur $]a,b[$.
Vrai ou Faux ?

Q1 : Si $f'(x)\geq 0$ pour tout $x\in\,]a,b[$, alors f est croissante sur $[a,b]$.

Q2 : Si f est croissante sur $[a,b]$, alors $f'(x)\geq 0$ pour tout $x\in\,]a,b[$.

Q3 : Si f est strictement croissante sur $[a,b]$, alors $f'(x)>0$ pour tout $x\in\,]a,b[$.

Q4 : Si $f'(x)>0$ pour tout $x\in\,]a,b[$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

Q5 : Si $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\ell$ existe, alors f est dérivable à droite en a et la dérivée à droite est $f'_d(a)=\ell$.

Exercice 4.

Objectif: Règle de Bernoulli-l'Hospital

Calculer les limites suivantes :

(*i*) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\log(x-1)}{x-2}$ (*ii*) $\lim_{x\to +\infty} x\,(\tanh(x)-1)$ (*iii*) $\lim_{x\to 0} (1+\sin(x))^{1/x}$

Exercice 5.

> **Objectif:** Utilisation de BH pour les suites
> **Théorie nécessaire:** BH, caractérisation des limites de fonctions par les suites et exercice à rendre série 10

Pour $(x_n)_{n\geq 1}$ les suites définies ci-dessous, calculer leur limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(*i*) $x_n = n\left(e^{1/n}-1\right)$ (*ii*) $x_n = \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n$, $t\in\mathbb{R}$ (*iii*) $x_n = n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 6.

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Vrai ou Faux ?

Q1 : Si $f(a) = g(a) = 0$ pour $a\in\mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

Q2 : Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

Q3 : S'il existent $x, y\in\mathbb{R}$, $x\neq y$ tels que $f(y)-f(x) = g(y)-g(x)$, alors il existe $c\in]x,y[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Q4 : Soit $a\in\mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{\sin(g(x))}{g(x)}$ existe.

Q5 : Soit $a\in\mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{\sinh(g(x))}{g(x)} = \cosh(g(a))$.

Exercice 7.

> **Objectif:** Etablir un nouveau critère de convergence pour les séries
> **Théorie nécessaire:** BH et corollaire du critère de comparaison pour les séries

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, une fonction.

(*i*) Montrer à l'aide de la règle de Bernoulli-l'Hospital que si f est deux fois dérivable et $f(0) = f'(0) = 0$, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2}.$$

Déduire du corollaire du critère de comparaison que la série suivante converge :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{k}\right).$$

(*ii*) Montrer que si f est dérivable et $f(0)\neq 0$ ou $f'(0)\neq 0$, la série suivante diverge :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{k}\right).$$

Indication : Distinguer les deux cas suivantes :

- Si $f(0)\neq 0$, utiliser la condition nécessaire pour la convergence de séries.
- Si $f(0) = 0$ et $f'(0)\neq 0$, montrer à l'aide de la règle de Bernoulli-l'Hospital que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0),$$

  et utiliser le corollaire du critère de comparaison.

(*iii*) En utilisant les points précédents, déterminer, parmis les séries suivantes, celles qui convergent et celles qui divergent :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{k}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right)$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1\right)$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ke^{\frac{1}{k}} - k - 1}{k}$

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sinh\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{k}\right)}{k}\right)$

(iv) La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$$

converge-t-elle ? Peut-on appliquer un raisonnement similaire à ci-dessus pour cette série ?

Exercice 8.

Objectif: Min/max locaux dans le cas où la fonction n'est pas dérivable en un point

Soit $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

(i) Montrer que, si $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]a, a+\delta[$, $f'(x) \geq 0$, alors f a un minimum local en a.

(ii) Montrer que, si $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]b-\delta, b[$, $f'(x) \geq 0$, alors f a un maximum local en b.

Remarque : On peut également montrer que :

- *Si $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]a, a+\delta[$, $f'(x) \leq 0$, alors f a un maximum local en a.*
- *Si $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]b-\delta, b[$, $f'(x) \leq 0$, alors f a un minimum local en b*

(iii) Trouver tous les extréma locaux de $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{-x}(x-1)^2$.

Exercice 9.

Trouver les extremums locaux des fonctions f suivantes, ainsi que le maximum et le minimum dans l'intervalle donné :

(i) $f(x) = x^2 - \left|x + \frac{1}{4}\right| + 1$ sur $[-1, 1]$

(ii) $f(x) = (x-1)^2 - 2\,|2 - x|$ sur $]2, 3[$

Exercice 10.

Note : cet exercice est tiré du livre "Mathematics for the Life Sciences" (Bodine, Lenhart et Gross).

Durant une épidémie, le nombre de personnes infectées $f(t)$ peut être modélisé par

$$f(t) = \frac{a \log(bt+1)}{bt+1},$$

où le temps t est quantifié en jours depuis le déclenchement initial de l'épidémie, et $a, b > 0$ sont des paramètres (constantes) du modèle.

i) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$ et donner une interprétation.

ii) A partir de quel moment (exprimé en temps) le nombre de personnes infectées commence à diminuer ?

iii) Supposons qu'un traitement est donné aux personnes infectées. L'ajout de ce traitement peut se traduire dans la modélisation par une augmentation de la valeur que prend le paramètre b. Quel effet cela a sur le pic épidémique ? En déduire l'influence du traitement sur la contamination de la population.

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 1 $-\dfrac{1}{2}$

Exercice 3 (i) 1

(ii) 0

(iii) e

Exercice 4 (i) 1

(ii) e^t

(iii) $\dfrac{1}{2}$

Exercice 8 (i) $f(0) = 0,\ f'(0) = ab$

(ii) à partir de $t = \dfrac{e-1}{b}$