Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice (À rendre au cours du 25 novembre)**.**
Montrer la proposition suivante (on pourra s'inspirer de la deuxième partie de la démonstration du théorème 4.13 du polycopié) :

Proposition.
Soient $D \subset \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ tels que

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

Rappel.
On rappelle que :

- la définition de $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ est

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ x_n \geq M,$$

  Ceci faisant partie de nos hypothèses, on peut choisir M comme on veut, et N nous est donné sans qu'on puisse faire plus d'hypothèse dessus.

- la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ est

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \geq M,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

  Ceci faisant partie de nos hypothèses, on peut choisir ε comme on veut et M nous est donné sans qu'on puisse faire plus d'hypothèse dessus.

- la définition de $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ est

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |f(x_n) - l| \leq \varepsilon.$$

  Ceci étant ce qu'on veut montrer, ε doit être quelconque, mais on peut choisir N comme bon nous semble.

Exercice 1.

Objectif: Propriétés des fonctions qui passent à la dérivée

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

(i) f paire $\Rightarrow$ f' impaire

(ii) f impaire $\Rightarrow$ f' paire

(iii) f périodique $\Rightarrow$ f' périodique

Exercice 2.
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x| + e^x$. Determiner l'expression de f', là où elle existe.

Exercice 3.

> **Objectif:** Calculer la dérivée de fonctions à l'aide de la définition

En partant de la définition, calculer la dérivée f' des fonctions f suivantes.

(i) $f(x) = \sin(2x)$ $\qquad$ (ii) $f(x) = \cos(2x)$

Indication : Utiliser

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Exercice 4.

> **Objectif:** Dérivabilité de fonctions définies par étapes en fonction de paramètres

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dérivable partout, où :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta\,, & x > 1 \end{cases}$$

Exercice 5.
Calculer la dérivée f' des fonctions f suivantes et donner les domaines de f et f'.

(i) $f(x) = \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$ $\qquad$ (ii) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ (iii) $f(x) = \sin(x)^2\cos(x^2)$

Exercice 6.

> **Objectif:** Dérivée d'ordre quelconque

Dans les trois cas suivants, déterminer $f^{(n)}$, la dérivée d'ordre n de la fonction f (pas besoin de démontrer que votre formule pour $f^{(n)}$ est correcte, il faut juste la trouver) :

(i) $f(x) = x^m \quad (m \in \mathbb{Z})$ $\qquad$ (ii) $f(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$ $\qquad$ (iii) $f(x) = \log(x)$

Exercice 7.

> **Objectif:** Dérivée d'un produit de composition

Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions f et g suivantes.

(i) $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\sin(x)^7\cos(x)^4$ $\qquad$ et $\qquad$ $g(x) = \log(x)^3$.

(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ $\qquad$ et $\qquad$ $g(x) = (x-1)^4$.

Exercice 8.
Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions.
Vrai ou Faux ?

Q1 : Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $]a-\delta, a+\delta[$.
Indication : Penser au monstre.

Q2 : Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) = \sqrt{f^2(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.
<u>Note</u> : plus d'information sur la croissance logistique dans le livre "Mathematics for the Life Sciences", Bodine, Lenhart et Gross.

La taille d'une population dans un environnement aux ressources limitées est souvent modélisée par

$$f(x) = \frac{KP_0\, e^{rx}}{K + P_0(e^{rx} - 1)},$$

où x représente le temps et f le nombre d'individus de la population. K est appelée la capacité de charge (*carrying capacity*) de l'environnement. P_0 est la taille initiale de la population et r est le taux de croissance de la population. Pour que cette modélisation ait du sens, toutes les quantités introduites prennent des valeurs réelles positives.

1. Étudier la monotonie de la fonction f.
2. Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
3. Supposons que $P_0 \leq K/2$. Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour montrer qu'il existe $c \geq 0$ tel que $f(c) = K/2$.
4. Calculer la fonction $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en faisant apparaître $f(x)$.
5. Calculer la dérivée de f au point c.
6. Esquisser le graphe de f.

Exercice 10.
Calculer la dérivée f' des fonctions f suivantes et donner les domaines de f et f'.

(*i*) $f(x) = \tan(x)$ (<u>sans formulaire !</u>)

(*ii*) $f(x) = \sqrt{\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}$

(*iii*) $f(x) = \sqrt[5]{\left(2x^4 + e^{-(4x+3)}\right)^3}$

(*iv*) $f(x) = \log_3(\cosh(x))$

(*v*) $f(x) = \log\left(4^{\sin(x)}\right) e^{\cos(4x)}$

Exercice 11.

Objectif: Dériée de la fonction réciproque

Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction injective sur l'intervalle $I \subset D(f)$. Étudier la dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} et calculer sa fonction dérivée.

(*i*) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(*ii*) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

(*iii*) $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

(*iv*) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

(*v*) $f(x) = \sinh(x)$ sur $\mathbb{R}$

(*vi*) $f(x) = \cosh(x)$ sur $I = [0, \infty[$

(*vii*) $f(x) = \tanh(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 12.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Vrai ou Faux ?

Q1 : Si $f(x) = x + e^x$, alors $(f^{-1})'(1) = 1 + \frac{1}{e}$.

Q2 : Si f est dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I.

Q3 : Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a.

Q4 : Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $(f \circ f)'(1) = 0$.

Q5 : Tout polynôme est dérivable une infinité de fois.

Q6 : Si f est bijective et dérivable alors $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 5 (i) $-\dfrac{15x^2+12x+5}{(3x^2-1)^2}$

(ii) $\dfrac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$

(iii) $2\sin(x)\left(\cos(x)\cos(x^2)-x\sin(x)\sin(x^2)\right)$

Exercice 7 (i) $2\log(3)^2$

(ii) -8

Exercice 9 (ii) K

(v) $\dfrac{rK}{4}$

Exercice 10 (i) $\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$

(ii) $\dfrac{\cos\left(\sqrt{\sin(x)}\right)\cos(x)}{4\sqrt{\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}\sqrt{\sin(x)}}$

(iii) $\dfrac{12\left(2x^3-e^{-(4x+3)}\right)}{5\sqrt[5]{\left(2x^4+e^{-(4x+3)}\right)^2}}$

(iv) $\dfrac{\tanh(x)}{\log(3)}$

(v) $\log(4)e^{\cos(4x)}\left(\cos(x)-4\sin(x)\sin(4x)\right))$

Exercice 11 On donne $(f^{-1})'(x)$:

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(ii) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $-\dfrac{1}{x}$

(iv) $-\dfrac{1}{x\log 2}$

(v) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(vi) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(vii) $\dfrac{1}{1-x^2}$