Remarque générale :
Les exercices suivants ont principalement été preparés par Peter Wittwer, Giordano Favi et Annalisa Buffa, enseignant.e.s à l'EPFL.

Exercice 1. (Vrai ou Faux)

Q1 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que f^2 est continue alors f est continue.

Q2 : Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert.

Q3 : Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est telle que $f([a, b]) = [a, b]$ alors f est continue.

Q4 : Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est continue et telle que $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ alors $f(\frac{1}{2}) = 0$.

Q5 : Si $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ est telle que $f(-1) = \frac{1}{3}$ et $f(1) = 3$ alors il existe $c \in [-1, 1]$ tel que $f(c) = 1$

Q6 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, alors f s'annule.

Exercice 2. (Vrai ou Faux)

Dans la suite nous supposerons que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $c < d$.

Q1 : Si $f : [a, b] \to [c, d]$ est une fonction bijective alors f est continue.

Q2 : Si $f : [a, b] \to [a, b]$ possède un point fixe $x^* \in [a, b]$ alors f est continue en x^*.

Q3 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et bijective alors f possède un point fixe.

Q4 : Si $f : [a, b] \to [a, b]$ est bijective alors f possède un point fixe.

Q5 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x \geq 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x \leq 0$.
Alors f possède un point fixe

Exercice 3. (QCM)

Q1 : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{[x]}$

- ☐ est définie au voisinage de 0 et est continue en 0,
- ☐ n'est pas définie au voisinage de 0,
- ☐ est définie au voisinage de 0 et est continue à droite en 0,
- ☐ est définie au voisinage de 0 et est continue à gauche en 0.

Q2 : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{[x]}$

- ☐ est constante sur $[0, 1]$ et dérivable en 1,
- ☐ est constante sur $[0, 1]$ et continue en 1,
- ☐ n'est pas constante sur $[0, 1]$ et est continue en 1,
- ☐ n'est pas constante sur $[0, 1]$ et est dérivable en 1.

Exercice 4. (Dérivées)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes

i) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$

ii) $f(x) = \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

iii) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}, \quad x > 0.$

iv) $f(x) = \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$

v) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

vi) $f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x^2)$

vii) $f(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

viii) $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$

Exercice 5. (Maximum et minimum)

Le minimum et/ou le maximum des fonctions données n'existent pas. Expliquer pourquoi.

i) $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$

ii) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

iii) $f :]0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 1/x$

iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{Arctg}\, x$

v) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + \mathrm{sgn} x$ où la fonction $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

vi) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Analyser le cas de la fonction $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Qu'est-ce qu'on peut conclure ?

Exercice 6. (Prolongement par continuité)

Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction f au point x_0, ou alors montrer que f ne peut être prolongée par continuité en x_0.

i) $f(x) = \cos(1/x)$ et $x_0 = 0$.

ii) $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$ et $x_0 = 0$.

iii) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ et $x_0 = 0$.

iv) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{2x}$, $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 = 0$.

v) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ et $x_0 = 1$.

Exercice 7. (Fonctions hyperboliques réciproques)

Trouver les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques en suivant les étapes ci-dessous. $i)$ $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ $ii)$ $f(x) = \mathrm{ch}(x)$ $iii)$ $f(x) = \mathrm{th}(x)$
$iv)$ $f(x) = \coth(x)$

- Donner le domaine de définition et l'image de f.
- Exprimer la fonction réciproque f^{-1} en termes des fonctions Log, $\sqrt{\ }$ et polynômes.
- Préciser le domaine de définition de f^{-1}.
- Esquisser les graphes de f et f^{-1}.

Exercice 8. (Prolongement par continuité avec paramètres)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x^4+1} - (ax^2+b) + \frac{1-\cos(cx)}{x^2}, \qquad \text{si } x \neq 0$$

et

$$f(0) = 0.$$

Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ afin que f soit continue en 0 et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$.

Exercice 9. (Points de discontinuité)

Déterminer si les fonctions suivantes sont continues ou pas.

$i)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

$ii)$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

$iii)$ $f(x) = 2^{\sqrt{x+\operatorname{Log} x}} \sin\left(\frac{3}{x^3+5}\right)$, pour tout $x \in D_f$;

$iv)$ $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin^2 x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. (Continuité de la dérivée)

On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$i)$ f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$ii)$ Calculer f'. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

$iii)$ f' est-elle continue sur son domaine de définition ?

Exercice 11. (Calcul de dérivées)

Calculer la dérivée f' de la fonction f et donner les domaines de f et f'.

$i)$

$$f(x) = \sin\sqrt{1+x^2},$$

ii)

$$f(x) = \cos\sqrt{1 + x + x^3},$$

iii)

$$f(x) = \mathrm{Log}\,(\sin x)\,, \quad x \in]0, \pi[,$$

iv)

$$f(x) = \mathrm{Log}\left(\frac{1 + \cos x}{\sin x}\right), \quad x \in]0, \pi[,$$

v)

$$f(x) = \mathrm{sh}(x)$$

vi)

$$f(x) = \mathrm{ch}(x)$$

vii)

$$f(x) = \mathrm{th}(x)$$

viii)

$$f(x) = x^2[x], \quad x \in \mathbb{R},$$

ix)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

x)

$$f(x) = |x|^p \quad \text{et} \quad g(x) = |x|^{p-1}x \quad \text{pour} \quad p > 1, x \in \mathbb{R}.$$

xi)

$$f(x) = x^x + x^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

xii)

$$f(x) = x^{\mathrm{Log}\,x} + (\mathrm{Log}\,x)^x, \quad x > 1.$$

Exercice 12. (V/F : Dérivée d'une composée de fonctions)

Soit $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (continûment dérivables) telles que les compositions $f \circ g$, $g \circ h$ et $f \circ g \circ h$ existent en tout $x \in \mathbb{R}$.

Q1 : Si $f'(0) = 0$, alors $(f \circ g)'(0) = 0$.

Q2 : Si $g'(0) = 0$, alors $(f \circ g)'(0) = 0$.

Q3 : Si $f, g \in C^2$, alors $\frac{d^2 f(g(x))}{dx^2} = g''(x)f'(g(x)) + g'(x)f''(g(x))$.

Q4 : $(f \circ g \circ h)'(x) = h'(x) \cdot (g' \circ h)(x) \cdot (f' \circ (g \circ h))(x)$ pour tout $\in \mathbb{R}$.

Exercice 13. (V/F : Dérivation)

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 (2 fois continûment dérivables).

Q1 : Si $f'(x) = 2x + 12f(x)$, alors $u(x) = f(2x)$ vérifie $u'(x) = x + 6u(x)$.

Q2 : Si $f'(x) = g'(5x)$, alors $u(x) = f(3x)$ vérifie $u'(x) = 3g'(15x)$.

Q3 : Si $g'(x) = xg(x)$, alors $g'(x^2) = 2x^2 g(x^2)$.

Q4 : Si $g'(x) = xg(x)$, alors $u(x) = g(x^2)$ vérifie $u'(x) = 2x^3 u(x)$.

Q5 : Si $f''(x) = 9f(x)$, alors $u(x) = f(\frac{1}{3}x)$ vérifie $u''(x) = u(x)$.

Exercice 14. (Théorème des accroissements finis)

i) Soit $f(x) = x^2 + px + q$ et $g(x) = rx^2 + sx + t$ o ù $p, q, r, s, t \in \mathbb{R}$ sont des coefficients. Pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$ trouver $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

et pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $g(b) - g(a) \neq 0$ trouver $d \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(d)}{g'(d)}.$$

ii) Soit $f(x) = x^3 + px$, $p \in \mathbb{R}$. Pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$ trouver $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Exercice 15. (Dérivation)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Calculer

$$\lim_{x \to a} \frac{af(x) - xf(a)}{x - a}.$$

Exercice 16. (Application de la Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n \left(e^{1/n} - 1\right)$

ii) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

iii) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\operatorname{Log} x}$

iv) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\sin \frac{\pi x}{2x + 1}\right)^{x^2}$

Exercice 17. (Bernoulli-L'Hospital)

Déterminer la limite - si elle existe - de la fonction $f(x)$ au point $x = \xi$ lorsque

i) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ $\quad \xi = 0$

ii) $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctg} x}{x}$ $\quad \xi = 0$

iii) $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ $\quad \xi = 0$

iv) $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ $\quad \xi = 0$

v) $f(x) = \dfrac{x^x - 4}{x - 2}$ $\quad \xi = 2$

vi) $f(x) = \dfrac{1 + 2x + 2x^2 - e^{2x}}{x^3}$ $\quad \xi = 0$

vii) $f(x) = x \tan x - \dfrac{\pi}{2 \cos x}$ $\quad \xi = \dfrac{\pi}{2}$

viii) $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{Log} x$ $\quad \xi = 0^+$

Exercice 18. (QCM - Dérivation)

Q1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective, dérivable et telle que $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$, $f'(3) = 5$, Alors

(A) $(f^{-1})'(3) = 1/5$

(B) $(f^{-1})'(3) = 1/2$

(C) $(f^{-1})'(1) = 1/2$

(D) $(f^{-1})'(1) = 1/3$

Q2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x = 0$ telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$ et soit $g(x) = xf(x) + f(-x)$. Alors, nécessairement :

(A) g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = -2$

(B) g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = 2$

(C) g n'est pas dérivable en $x = 0$

(D) g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = 0$

Q3 : Soit f une fonction dérivable sur son domaine de défintion D_f et telle que f' est positive dans tous les points à l'intérieur de D_f. Alors :

(A) f n'admet aucun minimum ou maximum local

(B) f est strictement croissante sur D_f

(C) f est surjective

(D) f n'admet aucun point d'inflexion avec tangente horizontale

Q4 : La fonction $f(x) = |x^3 - x|$

(A) n'admet aucun minimum local

(B) est continue et dérivable sur D_f

(C) est paire

(D) est impaire

Q5 : Soit $f(x) = \dfrac{e^x}{|x| - 1}$

(A) f ne présente aucune asymptote horizontale

(B) on peut appliquer à la fonction le théorème de Rolle sur l'intervalle $[2, 5]$

(C) la fonction est dérivable en $x_0 = 0$

(D) la fonction est continue en $x_0 = 0$

Q6 : Soit $f(x) = \dfrac{e^x}{|x| - 1}$

(A) admet un minimum local

(B) n'admet aucun point avec tangente horizontale

(C) admet un maximum local en $x_0 = -1$

(D) on peut appliquer à la fonction le théorème des accroissements finis de Lagrange sur l'intervalle $[-1/2, 1/3]$

Q7 : En considérant la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défine par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

(A) on peut appliquer à f le théorème des accroissements finis de Lagrange sur l'intervalle $[0, 2]$

(B) est dérivable sur $\mathbb{R}$

(C) n'est pas continue en $x = 0$

(D) f admet un minimum local en $x = 2$

Q8 : Soit f définie sur $[0, 1]$, continue et dérivable sur $]0, 1[$, et telle que $f(0) = f(1)$. Alors

(A) il existe un point $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$

(B) on peut appliquer à f le théorème des accroissements finis de Lagrange sur l'intervalle $[1/4, 3/4]$

(C) f est continue sur $[0,1]$

(D) on peut appliquer à f le théorème de Rolle sur l'intervalle $[1/4, 3/4]$

Exercice 19. (Vrai ou Faux)

Q1 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2 fois dérivable et $f''(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, alors f est un polynôme de degré ≤ 1.

Q2 : La fonction $f(x) = e^{\sin^2(x)}$ possède un point stationnaire dans l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Q3 : La fonction $f(x) = \text{Arccotg}(x) + \text{Arccotg}(\frac{1}{x})$ est constante sur $\mathbb{R}^*$.

Q4 : Si f est paire et infiniment dérivable alors $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k impair.

Exercice 20. (Extremums d'une fonction)

Déterminer le maximum et le minimum de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

i) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 2$ sur $I = [-4; 6]$,

ii) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $I = \left[\frac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$

Exercice 21. (Étude de fonction)

Faire l'étude de la fonction $f(x) = x + \sin x + \cos x$. Plus précisément, donner les extrema de f, étudier la croissance de f ainsi que sa convexité (étude de f'')

Exercice 22. (V/F : Limites de quotients)

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q1 : Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Q2 : Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

Exercice 23. (V/F : Dérivées d'ordre supérieur)

Soient I un intervalle ouvert, $f, g \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$. Soient encore $k, n \in \mathbb{N}$.

Q1 : Pour $n \geq 6$, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < 7$ et $f^{(7)}(a) = 1$, alors f admet un minimum en a.

Q2 : Si $I =]-b, b[$ pour un $b > 0$ et f est impaire sur I, alors $f^{(2k)}(0) = 0$ pour $0 \leq 2k \leq n$.

Q3 : Si $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < n$ et $g^{(n)}(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

Exercice 24. (Opérations algébriques avec les développements limités)

Déterminer les développements limités d'ordre 4 autour de $x_0 = 0$ de

$$\text{Log}(1+x) + \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{et de} \quad \frac{\text{Log}(1+x)}{(1+x)^2}$$

Exercice 25. (Valeurs extrémales)

Déterminer le maximum et le minimum de la fonction $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $I = \left[\frac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

Exercice 26. (Points stationnaires et d'inflexions)

Détérminer les points stationnaires et points d'inflexion de la fonction $f(x) = x + \sin x + \cos x$.

Exercice 27. (Etude de fonction et développement limité)

Soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = x^x e^{-x}$$

i) Montrer que $x = 1$ est l'unique point stationnaire de la fonction f.

ii) Etudier sa nature et donner le développement limité d'ordre 4 en ce point.

iii) Montrer que

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = 1$$

et calculer

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - 1}{x \operatorname{Log} x}.$$

Exercice 28. (Fonctions convexes)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est strictement convexe.

Exercice 29. (V/F : Fonctions convexes)

Soit I un intervalle ouvert, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Q1 : Si f est convexe sur I, alors f est dérivable sur I.

Q2 : Si f est convexe et deux fois dérivable sur I, alors $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$.

Q3 : Si f est concave et dérivable sur I, alors $f(y) - f(x) \geq f'(y)(y - x)$ pour tout $x, y \in I$.

Exercice 30. (V/F : Point stationnaires et d'inflexions)

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $f(0) = f'(0) = 0$ et $g(x) = x \cdot f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q1 : g admet un point stationnaire en $x = 0$.

Q2 : $g''(0) = 0$.

Q3 : Si $f''(0) > 0$, alors g admet un point d'inflexion en $x = 0$.

Q4 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = f''(0)$.

Q5 : Si g admet un extremum local strict en $x = 0$, alors $f''(0) = 0$.

Exercice 31. (Fonctions convexes)

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes de classe C^2.

i) Montrer que la fonction composée $g \circ f$ est aussi convexe si g est croissante.

ii) Que devient ce résultat si g n'est pas supposée croissante ?

Exercice 32. (Minimum fonctions convexes)

Montrer que si f est convexe et dérivable sur I et $f'(x_0) = 0$, alors on a $\min_{x \in I} f(x) = f(x_0)$.

Exercice 33. (Vrai ou Faux)

Q1 : Le développement limité d'ordre 4 de $\cos^2(x)$ en $a = 0$ vaut $1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4\epsilon(x)$.

Q2 : Si f a un développement limité d'ordre n en 0 qui est nul pour tout n alors f est nulle.

Exercice 34. (Développement limité)

Déterminer le développement limité d'ordre 3 de la fonction $f(x) = x \operatorname{Log}(2 + x)$.

i) autour de $x_0 = 0$;

ii) autour de $x_0 = -1$.

Exercice 35. (Développement limité)

Déterminer le développement limité des fonctions $f(x)$ autour du point x_0 (pour l'ordre indiqué).
[Indication : utiliser les propriétés des développements limités (ne pas dériver).]

i) $f(x) = \sin x \cdot (\cos^2 x + 5)$ $\quad x_0 = 0 \quad$ d'ordre 4

ii) $f(x) = \cos(\sin x)$ $\quad x_0 = 0 \quad$ d'ordre 4

iii) $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$ $\quad x_0 = 0 \quad$ d'ordre 6

iv) $f(x) = \dfrac{2 + 2x + x^2}{e^x}$ $\quad x_0 = 0 \quad$ d'ordre 5

Exercice 36. (Développement limité)

Trouver le développement limité d'ordre n autour de $x_0 = 0$ pour les cas suivants :

i) $f(x) = \operatorname{Log}(\cos(x)), \quad n = 4$

ii) $f(x) = \exp(\sin(x)), \quad n = 4$

iii) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}, \quad n = 3$

Exercice 37. (Vrai ou Faux)

Q1 : La fonction $e^{|x|} \operatorname{Log}(|x|)$ admet une limite lorsque $x \to 0$.

Q2 : La limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{x^{1000}}$ vaut 0.

Q3 : La série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$ converge seulement pour $x = 0$.

Q4 : Le domaine de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k^2 + 1}(x + 2)^k$ est $[-3, -1]$.

Q5 : $\operatorname{Log}(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 38. (Limites)

Calculer les limites suivantes :

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}(x)\cos x + \cos(x^{-1})}{\sqrt{x}}$

ii) $\lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{Log}(x-1)}{x-2}$

iii) $\lim_{x\to 0} (1+\sin(x))^{1/x}$

iv) $\lim_{x\to+\infty} x\left[\mathrm{Log}(x+1) - \mathrm{Log}\, x\right]$

En déduire la limite suivante :

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Exercice 39. (Limites)

Calculer les limites suivantes :

i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin(x)}$$

ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \,\mathrm{Log}\,\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{Log}^2(1+x^2)}$$

iii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Log}(1+x^2)}{\mathrm{sh}^2\, x}$$

iv)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin \frac{2}{\sqrt{x}}}{\mathrm{Log}(\sqrt{x}-1) - \mathrm{Log}\sqrt{x}}$$

v)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})\sin(x-1)}{\mathrm{Log}((x-1)^2)}$$

vi)
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - \cos \frac{1}{x}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$$

vii)
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1+\cos(x-\pi)}{x\sin x}$$

viii)
$$\lim_{x\to 0+} (\sin x)^{\frac{1}{\mathrm{Log}\, x}}$$

Exercice 40. (Primitives)

Calculer les primitives suivantes :

i) $\int \cos(x)\sin(x)\, dx$

ii) $\int (1+x^5)^3 \cdot x^4\, dx$

iii) $\int (1+2x^2)^2\, dx$

iv) $\int e^{\sin^2(x)} \cdot \sin(2x)\, dx$

v) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$

vi) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$

vii) $\int \frac{x^2+2}{x^3+6x}\, dx$

viii) $\int \frac{\mathrm{Arctg}\, x}{1+x^2}\, dx$

ix) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

x) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

xi) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}\,dx$

(poser $u=\sqrt{1+x}$)

Exercice 41. (Vrai ou Faux)

Q1 : Soit $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ continue. Si $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ alors $f(x)=0$ pour tout $x\in[-1,1]$

Q2 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{1+\sqrt{u}}$ est strictement inférieure à 1.

Q3 : Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue et impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+$.

Exercice 42. (Primitive de la fonction inverse)

Soit f une fonction inversible, f^{-1} sa fonction réciproque et F une primitive de f. Montrer que la fonction $G(x) = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$ est une primitive de f^{-1}. En déduire les primitives de $\operatorname{Log} x$, $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arctg} x$.

Exercice 43. (Intégrale définie)

i) Pour $a\in\mathbb{R}$ calculer

$$\int_a^{a+2\pi} \sin x\,dx,\quad \int_a^{a+2\pi} \cos x\,dx,$$

$$\int_a^{a+\pi} \sin x\,dx,\quad \int_a^{a+\pi} \cos x\,dx,$$

ii) Calculer

$$\int_0^1 x^2(x^3-1)^{39}\,dx.$$

iii) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{2-\cos \pi x}\,dx$$

Exercice 44 (Intégrales)

i)

$$\int \frac{\cos t}{1+\sin t}\,dt$$

ii)

$$\int \frac{\operatorname{sh} t}{e^t+1}\,dt$$

iii)

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt$$

iv)

$$\int \frac{e^t}{\operatorname{ch} t}\,dt$$

v)
$$\int \frac{\sin 2t}{2+\cos t}\,dt$$

vi)
$$\int \frac{\sin t}{2+\cos^2 t}\,dt$$

vii)
$$\int \frac{\cos^2 t \sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$$

viii)
$$\int \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)}\,dt$$

ix)
$$\int (1+t^3)\sqrt{t}\,dt$$

x)
$$\int t^5\sqrt{1-t^3}\,dt$$

xi)
$$\int \frac{1}{\sqrt{t(6-t)}}\,dt$$

xii)
$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-3t}}\,dt$$

Exercice 45 (Intégration par parties)

Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

i) $\displaystyle\int \operatorname{Arctg} x\,dx$

ii) $\displaystyle\int x \operatorname{Arctg} x\,dx,$

iii) $\displaystyle\int \operatorname{Log} x\,dx$ puis $\displaystyle\int (\operatorname{Log} x)^2\,dx,$

Exercice 46 (Intégrale définie)

Calculer les intégrales suivantes (a, b réels donnés, p et q entiers naturels donnés) :

i) $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin x \cos x\,dx$, pour $a \in \mathbb{R}$

ii) $\displaystyle\int_a^{a+\pi} \sin x \cos x\,dx$, pour $a \in \mathbb{R}$

iii) $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\operatorname{Log} x}{x^2+1}\,dx$ $(0 < a)$ (changement de variable : $t = \frac{1}{x}$)

iv) $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\cos(px)\cos(qx)\,dx$ (utiliser $\cos(px)\cos(qx) = \frac{1}{2}(\cos(p+q)x + \cos(p-q)x))$

v) $\displaystyle\int_a^{b} \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$

vi) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (|x-1| + |x| + |x+1| + |x+2|)\, dx$

vii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ (changements de variable : $x = \pi - u$ puis $z = \cos u$).

Exercice 47 (Changement de variable)

Calculer les intégrales définies suivantes :

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^5\, dx$

ii) $\displaystyle\int_2^{3} \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx$

iii) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\, dx$

iv) $\displaystyle\int (\cos x)^{1234} \sin x\, dx$

v) $\displaystyle\int \frac{1}{x \operatorname{Log} x}\, dx$

vi) $\displaystyle\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx$

vii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$ (changement de variable $u = \frac{1}{2}x - 1$)

Exercice 48 (QCM : Intégration)

Q1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f telle que $F(2) = 5$. Alors

(A) il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) - f(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(B) $F(x) = \int_2^x f(t)dt$

(C) F n'est pas dérivable en $x_0 = 2$

(D) $F(x) = 5 + \int_2^x f(t)dt$

Q2 : $\displaystyle\int^x \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx =$

(A) $2\sqrt{x} - 2\operatorname{Arctg}\sqrt{x} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

(B) $2\sqrt{x} - 2\tan\sqrt{x} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

(C) $2\sqrt{x} + 2\operatorname{Arctg}\sqrt{x} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

(D) $2\sqrt{x} - 2\operatorname{Arctg} x + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Q3 : Si $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^5}dx$, alors

(A) $A = 2\int_0^1 \sqrt[3]{x^5}dx$

(B) $A = 0$

(C) $A = \frac{3}{8}x^{2/3}$

(D) $A = x\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^2}dx$

Q4 : Soit $f(x) = x + 1$ et soit μ la valeur moyenne intégrale de f sur $[0, 2]$. Alors

(A) la fonction $g(x) = f(x) + 3$ a la même valeur moyenne sur $[0, 2]$

(B) $\mu = 4$

(C) si $c = 1$ on a $f(c) = \mu$

(D) il existe un point $c \in [0, 2]$ tel que $f(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$

Q5 : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_0^3 f(2x)dx = \operatorname{Log} 2, \qquad \int_1^3 f(2x)dx = \operatorname{Log} 4$$

Les valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels

$$\int_0^2 f(x)dx = a, \qquad \int_0^6 f(x)dx = b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

sont

(A) $b = -\operatorname{Log} 4,\ a = \operatorname{Log} 1/4$

(B) $b = \operatorname{Log} 2,\ a = \operatorname{Log} 4$

(C) $b = \operatorname{Log} 2,\ a = \operatorname{Log} 1/4$

(D) $b = \operatorname{Log} 4,\ a = \operatorname{Log} 1/4$

Q6 : $\displaystyle\int^x \frac{x+3}{x^2-2x+1}dx =$

(A) $\operatorname{Log}|x-1| - \frac{4}{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(B) $-\operatorname{Log}|x-1| - \frac{4}{x-1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(C) $\operatorname{Log}|x-1| - \frac{4}{x-1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(D) $\operatorname{Log}|x-1| + \frac{4}{x-1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Exercice 49. (Intégration par parties)

En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales et les primitives suivantes :

Q1 : $\displaystyle\int_1^3 \operatorname{Log} x\,dx$

Q2 : $\displaystyle\int_1^2 x\operatorname{Log} x\;dx$

Q3 : $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$ (poser d'abord $u=\sqrt{x}$.)

Q4 : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{Log} x}{x^2}\;dx$

Q5 : $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\;dx$

Q6 : $\displaystyle\int \operatorname{Log}^3 x\;dx$

Exercice 50. (Fonctions rationnelles)

Calculer les intégrales suivantes :

Q1 : $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$ Q2 : $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x-2)}\,dx$

Exercice 51. (Intégrales généralisées)

Calculer - si elles convergent - les intégrales généralisées suivantes :

Q1 : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\;dx$

Q2 : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\;dx$

Q3 : $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\;dx$

Q4 : $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Log} x\;dx$

Q5 : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\;dx$

Q6 : $\displaystyle\int_0^1 \sin(\operatorname{Log} x)\;dx$

Exercice 52. (Intégration par parties)

Q1 :
$$\int^x e^{\sqrt{t+2}}\;dt$$

Q2 :
$$\int^x t\operatorname{Log} t^{2/3}\;dt$$

Q3 :
$$\int^x \frac{\operatorname{Log} t}{(1+t)^2}\;dt$$

Q4 :
$$\int^x \frac{\sin t}{1+\sin t}\;dt$$

Q5 :
$$\int^x \sin t\cos^8 t\;dt$$

Q6 :
$$\int^x \operatorname{Arccos}^2 t\;dt$$

Q7 :
$$\int^x t^3\sin t^2\;dt$$

Q8 :
$$\int^x \frac{\sin t}{1+\cos t+\tan^2 t}\;dt$$

Exercice 53. (Intégrales généralisées)

Q1 :
$$\int_0^1 t\operatorname{Log}\sqrt{t}\;dt$$

Q2 :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\;dt$$

Q3 :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+8t+17}\;dt$$

Q4 :
$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\;dt$$

Q5 :

$$\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt$$

Q6 :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$$

Q7 :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{t^3}\,dt$$