Ens: Anna Lachowska
Analyse I - (n/a)
Novembre 2024
1 h
Room : BLANK

BLANK

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit la série avec paramètre $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ définie par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(x))^n}.$$

Alors la série converge si et seulement si

- [x] $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\cup]e,+\infty[$
- [ ] $x \in]e,+\infty[$
- [ ] $x \in \left]\frac{1}{e},1\right[\cup]1,e[$
- [ ] $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ conv $\Leftrightarrow |r|<1$

$r = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow |r|<1 \Leftrightarrow |\ln x| > 1$

$\Leftrightarrow \{-\infty < \ln x < -1\} \cup \{1 < \ln x < \infty\}$

$\Leftrightarrow x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]e, \infty[$

Question 2 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = \dfrac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$. Alors :

- [ ] $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- [ ] $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$
- [x] $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{5}}$
- [ ] $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(5n+1)^n}{n^n 5^n} = \lim \left(\frac{5n+1}{5n}\right)^n =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{5n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}$

$\underbrace{\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}}_{\to e}$

Question 3 : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

- [ ] Si $a_0 > 1$, la suite est croissante.
- [ ] Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante.
- [ ] Si $a_0 < 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
- [x] Si $a_0 = 0$, la suite est convergente.

récurrence linéaire $a_n = q a_{n-1} + b$, $q = \frac{1}{2}$, $|q|<1$

$\Rightarrow$ convergente $\forall a_0 \in \mathbb{R}$

Question 4 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, et soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Alors :

- [x] $\inf A = -1$ et $\sup A = \frac{3}{2}$
- [ ] $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$
- [ ] $\inf A = -1$ et $\sup A = 1$
- [ ] $\inf A = 0$ et $\sup A = \frac{3}{2}$

$-1 \qquad 1$

$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$; $a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$

$a_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \sup A$

$-1 = \inf A$

Question 5 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = -\frac{2}{3}u_{n-1} + 2$. Alors :

- [ ] $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- [ ] $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$
- [x] $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{6}{5}$
- [ ] $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

récurrence linéaire

$u_n = q u_{n-1} + b$, $q = -\frac{2}{3}$

$|q| < 1 \Rightarrow$ convergente.

Limite, $\ell = -\frac{2}{3}\ell + 2 \Rightarrow \frac{5}{3}\ell = 2 \Rightarrow \ell = \frac{6}{5}$

Question 6 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{n}.$$

$a_{2n} = -1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{3}{2n} = y_{2n} \to -1$

$a_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{3}{2n+1} = x_{2n+1} \to 1$

Alors :

- [ ] $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{4}$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$
- [ ] $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$
- [x] $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$
- [ ] $\liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$ et $\limsup_{n\to\infty} a_n = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \liminf a_n = -1$

$\limsup a_n = 1$

Question 7 : Une des solutions de l'équation $z^5 = \left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2$ est

$(1+\sqrt{3}i)^2 = 4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 4\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^2 = 4e^{\frac{2\pi i}{3}}$

- [ ] $z = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$
- [x] $z = \sqrt[5]{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$
- [ ] $z = \sqrt[5]{4}\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right)$
- [ ] $z = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$

$z^5 = 4e^{\frac{2\pi i}{3}} \Rightarrow z \in \left\{\sqrt[5]{4}\, e^{\frac{2\pi i}{15} + \frac{2\pi i k}{5}},\ k = 0,1,2,3,4\right\}$

$\frac{2\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}, \frac{3\pi}{15}, \frac{9\pi}{15} \Rightarrow z = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$

Question 8 : Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \dfrac{k+2}{k^3}$ et soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Alors :

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+2}{k^3}$

- ☐ $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$
- ☐ la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument
- ☐ $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$
- ☒ la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument

$0 < \frac{k+2}{k^3} = \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^3}$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^3}$ sont convergente : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ est convergente $\forall p > 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right)$ est convergente

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+2}{k^3}$ converge absolument

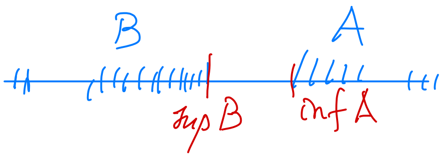
Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient A et B deux sous-ensembles bornés non-vides de $\mathbb{R}$. Si $\inf A > \sup B$, alors $A \cap B$ est vide.

$\forall y \in B, \forall x \in A \Rightarrow$
$y \leq \sup B < \inf A \leq x$ $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$

☒ VRAI ☐ FAUX



Question 10 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres strictement négatifs. Alors, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si et seulement si elle converge.

☒ VRAI ☐ FAUX

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$, $(-a_n) > 0$ $\forall n$

$\Rightarrow$ convergence $\Leftrightarrow$ convergence absolue

Question 11 : Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2) = 0$. Alors $\mathrm{Re}\,(z_1) \cdot \mathrm{Re}\,(z_2) = 0$.

☐ VRAI ☒ FAUX

$z_1 = 1+i$, $z_2 = 1+i$ $\quad \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 = 1$

$\Rightarrow z_1 z_2 = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$, $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = 0$

Question 12 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

☒ VRAI ☐ FAUX

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim a_n = 2$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{2} = 1$

Question 13 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = f(a_{n-1})$. Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Exemple : $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$, $f(x) = \frac{1}{3}x$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$

$a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, .. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.