Anna Lachowska
décembre 2023

Analyse I – Série de révision
Questions Ouvertes

Question 1. (6 pts)

i) (1 pt) Donner la définition d'une fonction dérivable en un point.

ii) (2 pts) Démontrer, en utilisant la définition donnée en *i*), que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $x = 1$. Justifier toutes les étapes de votre argument.

iii) (3 pts) Trouver toutes les valeurs de $m \in \mathbb{Q}$, $m \neq 0$, telles que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^m, & x \leq 1 \\ (x-1)^m, & x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable en $x = 1$.

Corrigé.

i) Une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle ouvert contenant le point $x = a$ est dérivable en $x = a$ si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Cette limite est la dérivée de f en $x = a$.

ii) Ici la fonction est définie séparement à gauche et à droite du point $x = 1$. Pour que cette fonction soit dérivable, il faut et il suffit que la dérivée à gauche $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe, que la dérivée à droite $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe, et et qu'elles soient égales. On note que $f(1) = 0$. On commence par le calcul de la dérivée à droite:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1} - 0}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Cette limite n'existe pas et donc la fonction donnée n'est pas dérivable en $x = 1$.

iii) Soit $m \in \mathbb{Q}$, $m \neq 0$. On calcul la dérivée à gauche:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x)^m - 0}{x-1} = -\lim_{x \to 1^-} (1-x)^{m-1} = \begin{cases} 0, & m > 1, \\ -1, & m = 1 \\ \text{n'existe pas}, & m < 1 \end{cases}$$

On calcul la dérivée à droite:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^m - 0}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (x-1)^{m-1} = \begin{cases} 0, & m > 1, \\ 1, & m = 1 \\ \text{n'existe pas}, & m < 1 \end{cases}$$

La dérivée de $f(x)$ en $x = 1$ existe si et seulement si les dérivées à gauche et à droite existent et sont égales. Par consequent, la fonction $f(x)$ est dérivable en $x = 1$ si est seulement si $m > 1$. *Remarque.* Si $m = 1$, on observe que la fonction s'écrit $f(x) = |x - 1|$. Cette fonction n'est pas dérivable en $x = 1$.

Question 2. (5 pts)
Soit (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$ une suite de nombres naturels telle que :

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_n = 2^{n-1} + 1$.

Justifier toutes les étapes de votre argument.

Démonstration par récurrence:

- (1 pt) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a_n l'élément de la suite définie dans la question. On dénote par $P(n)$ la proposition suivante:
$$a_n = 2^{n-1} + 1.$$
On va démontrer que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.

- (1 pt) Initialisation: $P(1)$: $a_1 = 2^{1-1} + 1 = 2^0 + 1 = 2$ est vraie.
$P(2)$: $a_2 = 2^{2-1} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ est vraie.

- (2 pts) Hérédité: Supposons que les propositions $P(n)$ et $P(n + 1)$ sont vraies, où $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrons que cela implique la proposition $P(n + 2)$.
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n = 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = 3 \cdot 2^n - 2^n + 3 - 2 = 2 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1.$$
Donc les propositions P_n et P_{n+1} impliquent la proposition P_{n+2}.

- (1 pt) Puisque les propositions $P(1), P(2)$ sont vraie, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ et $P(n + 1)$ impliquent $P(n + 2)$, alors par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Question 3. (6 pts) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci:

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{n+2} = x_n + x_{n+1}.$$

Démontrer que

i) (3 pts) $x_n \geq n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (par récurrence)

ii) (3 pts) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Justifier toutes les étapes de votre argument.

Corrigé.

i)
- Soit $P(n)$ la proposition: $x_n \geq n-1$, où $(x_n)_{n\geq 1}$ sont des nombres de Fibonacci. On va démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.
- Initialisation: $x_1 = 1 > 0$, $x_2 = 1 \geq 1$, $x_3 = 2 \geq 2$ donc $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.
- Hérédité: Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies où $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrons que cela implique $P(n+2)$.

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \geq n - 1 + n = 2n - 1 \geq n + 1 \qquad \Leftrightarrow n \geq 2.$$

Donc pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ et $P(n+1)$ impliquent $P(n+2)$.
- Conclusion: puisque $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies, et pour tout n naturel tel que $n \geq 2$, les propositions $P(n)$ et $P(n+1)$ impliquent $P(n+2)$, alors par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$. Puisque $P(1)$ est vraie aussi, on a que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) On dénote le quotient $\frac{x_{n+1}}{x_n} = a_n$. En divisant la relation des nombres de Fibonacci par $x_{n+1} \neq 0$, on obtient

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1 \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Supposons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Alors sa limite l satisfait l'équation $l = \frac{1}{l} + 1$. Les racines de cette équation quadratique sont $l_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Puisque $x_n \geq n-1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par la partie *i)*, on peut conclure que si la limite existe, elle est positive et égale à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Il nous reste à démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On considère la valeur absolue $|a_{n+1} - l|$:

$$|a_{n+1} - l| = \left|\frac{1}{a_n} + 1 - l\right| = \left|\frac{1}{a_n} + 1 - \frac{1}{l} - 1\right| = \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|l - a_n|}{a_n l} \leq \frac{|a_n - l|}{l}.$$

La dernière inégalité utilise la propriété $a_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De façon similaire on trouve $|a_n - l| \leq \frac{|a_{n-1}-l|}{l}$ pour $n \geq 2$, et ainsi de suite. Finalement on trouve

$$|a_{n+1} - l| \leq \frac{|a_1 - l|}{l^n} \mapsto 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{l^n} = 0$ pour tout $l > 1$. Alors on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Question 4. (6 pts) Soit $f : [-2, 2] \to [-1, 1]$ une fonction continue.

i) (2 pts) Démontrer que l'équation $2f(x) = x$ possède au moins une solution sur $[-2, 2]$. Justifier toutes les étapes de votre argument.

ii) (2 pts) Démontrer que l'équation $f \circ f(x) = x$ possède au moins une solution sur $[-2, 2]$. Justifier toutes les étapes de votre argument.

iii) (2 pts) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ donner un exemple d'une fonction continue $f_k : [-2, 2] \to [-1, 1]$ telle que $2f_k(x) \neq x$ pour tout $x \in [-2, 2 - \frac{1}{k}]$.

Corrigé.

i) Soit $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2f(x) - x$. Alors g est une fonction continue sur $[-2, 2]$. Puisque $f(x) \in [-1, 1]$ pour $x \in [-2, 2]$, on a

$$g(-2) = 2f(-2) + 2 \geq 2 \cdot (-1) + 2 = 0, \qquad g(2) = 2f(2) - 2 \leq 2 \cdot 1 - 2 = 0.$$

Si $g(-2) = 0$ ou $g(2) = 0$, alors on a trouvé une solution pour l'équation $2f(x) = x$ dans $[-2, 2]$. Sinon, $g(x)$ est une fonction continue sur $[-2, 2]$ avec $g(-2) > 0$ et $g(2) < 0$. Alors par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un point $c \in]-2, 2[$ tel que $g(c) = 0$, ce qui implique $2f(c) = c$.

ii) Soit $h : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f \circ f(x) - x$. Alors h est une fonction continue sur $[-2, 2]$. Puisque $f(x) \in [-1, 1]$ pour $x \in [-2, 2]$, on a

$$h(-2) = f(f(-2)) + 2 \geq (-1) + 2 = 1, \qquad h(2) = f \circ f(2) - 2 \leq 1 - 2 = -1.$$

Alors par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un point $d \in]-2, 2[$ tel que $h(d) = 0$, ce qui implique $f \circ f(d) = d$.

iii) Par exemple on a une fonction continue pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 2 - \frac{1}{k} \\ 4k - 1 - 2kx, & 2 - \frac{1}{k} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Alors $2f_k(x) = 2 > x$ pour tout $x \in [-2, 2 - \frac{1}{k}]$.

Question 5. (5 pts) Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ donnée par la formule

$$f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x - 2x.$$

i) (3 pts) Démontrer, en utilisant un résultat du cours, que pour tout $a < b$, $a, b \in [-2, 1]$, on a

$$f(b) - f(a) \leq (e - 2)(b - a).$$

Justifier toutes les étapes de votre argument.

ii) (2 pts) Démontrer, en utilisant un résultat du cours, que pour tout $a < b$, $a, b \in [-2, 1]$, on a

$$f(b) - f(a) > 2(a - b).$$

Justifier toutes les étapes de votre argument.

Corrigé.

i) La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule la première et deuxième dérivée de la fonction donnée:

$$f'(x) = (2x - 4)e^x + (x^2 - 4x + 6)e^x - 2 = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2.$$

$$f''(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2 e^x.$$

Puisque $f''(x) = x^2 e^x \geq 0$ pour tout $x \in [-2, 1]$, alors la fonction $f'(x)$ est croissante sur $[-2, 1]$. Donc $f'(-2) \leq f'(x) \leq f'(1)$ pour tout $x \in [-2, 1]$, et alors $10e^{-2} - 2 \leq f'(x) \leq e - 2$. Par le théorème des accroissements finis pour la fonction f, qui est continue sur $[-2, 1]$ et dérivable sur $]-2, 1[$, et pour tout $a, b \in [-2, 1]$, tels que $a < b$, il existe un point $c \in]-2, 1[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dans notre cas, puisque $f'(x) \leq e - 2$ pour tout $x \in [-2, 1]$, on a pour tout $a, b \in [-2, 1]$, $a < b$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq e - 2 \quad \Rightarrow \quad f(b) - f(a) \leq (e - 2)(b - a).$$

ii) Par le même argument, puisque $f'(x) \geq 10e^{-2} - 2 > -2$ pour tout $x \in [-2, 1]$, on a pour tout $a, b \in [-2, 1]$, $a < b$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > -2 \quad \Rightarrow \quad f(b) - f(a) > -2(b - a) = 2(a - b).$$

Question 6. (9 pts) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente.

i) (2 pts) Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1.$$

Justifier toutes les étapes de votre argument.

ii) (3 pts) Est-ce que la série $\sum_{n=1} a_n^2$ est nécessairement convergente? Si oui, justifiez votre réponse. Si non, donnez un contre-exemple.

iii) (4 pts) Donner un exemple d'une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels positifs, telle que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, mais la série $\sum_{n=2}^{\infty}(b_n)^p$ est divergente pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Corrigé.

i) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente. Alors la condition nécessaire de convergence d'une série numérique est satisfaite: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. On utilise la limite bien connue de la fonction

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Finalement, d'après le critère de la limite d'une fonction à partir des suites, pour toutes suite $(a_n)_{n\geq 1}$ convergente vers 0, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1.$$

ii) Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente. Cela n'implique pas que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. Contre-exemple: soit $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente par le critère de Leibnitz. Notamment, les trois conditions du critère de Leibnitz sont satisfaites: (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$, (2) la suite des valeurs absolues est strictement décroissante: $\frac{1}{\sqrt{n+1}} = |a_{n+1}| < |a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$, (3) la suite est altérnée: $a_{n+1}a_n < 0$ pour tout $n \geq 1$. Mais la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.
Remarque. Si on avait la condition supplémentaire $a_n \geq 0$, la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ impliquerait la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. En effet, la limite $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ implique $0 \leq a_n < 1$ pour tout $n \geq k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et donc $0 \leq a_n^2 < a_n$ pour tout $n \geq k$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge par le critère de comparaison.

iii) Un exemple est donné par la suite $b_n = \frac{1}{\log n}$. Clairement, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$. Mais la série $\sum_{n=2}^{\infty} b_n^p = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$ est divergente pour tout $p \in \mathbb{N}$ par le critère de comparaison avec la série harmonique divergente. En effet, soit $p \in \mathbb{N}$ fixé, et considérons la limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(\log x)^p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^p}{x} \overset{x=e^y}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{y^p}{e^y} \overset{\text{BL}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{p!}{e^y} = 0,$$

où la dernière égalité suit par la règle de Bernoulli-L'Hospital appliquée p fois. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(\log n)^p}} < 1 \quad \Leftrightarrow \qquad \text{pour tout } n \geq k$$

Alors $\frac{1}{(\log n)^p} > \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq k$. Puisque la série harmonique $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$ diverge aussi. De même, la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$ diverge.

Question 7. (2 pts)
Donner un exemple d'un nombre complexe z tel que les deux conditions sont simultanément satisfaites:

i) $\mathrm{Im}(z) \neq 0$,

ii) $\mathrm{e}^z \in \mathbb{R}$.

Exemple: $z = i\pi$ et $e^z = e^{i\pi} = -1 \in \mathbb{R}$.

Question 8. (2 pts)
Donner un exemple d'une suite des nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les trois conditions sont simultanément satisfaites:

i) la suite (a_n) est bornée,

ii) la suite (a_n) est divergente,

iii) $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple: $a_n = 2 + (-1)^n$.

Question 9. (1 pt)
Donner un exemple de fonction continue $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui a une asymptote verticale, mais pas d'asymptote horizontale. La réponse doit être une expression.

Exemple: $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)}$.

Question 10. (1 pt)
Donner un exemple de fonction continue $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0+}^{1} f(x)\,dx$ est divergente. La réponse doit être une expression.

Exemple: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Question 11. (8pts)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x) = \sqrt{1 + 2\cos^2(x)}$.

i) (2 pt) La fonction f est-elle périodique? Si oui, trouver la plus petite période de f.

ii) (2 pt) Calculer la dérivée $f'(x)$ et trouver son domaine de définition.

iii) (4pts) Trouver les points critiques de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$ et determiner leur nature. Justifier votre réponse.

Corrigé.

i) La fonction racine carrée est bijective $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et continue, et donc monotone. Alors $f(x+T) = f(x)$ si et seulement si $1 + 2\cos^2(x+T) = 1 + 2\cos^2(x)$. On note que $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$, donc on a l'équation $2+\cos(2(x+T)) = 2+\cos(2x)$. Puisque $\cos(x)$ est 2π-périodique, on trouve que $f(x)$ est périodique avec la plus petite période $T = \pi$.

ii) La dérivée de $f(x)$ est donnée par la formule

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+2\cos^2(x)}} \cdot (4\cos(x)(-\sin(x))) = \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+2\cos^2(x)}} = \frac{-\sin(2x)}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$$

Le domaine de définition de $f'(x)$ est $\mathbb{R}$, parce que l'expression $(1 + 2\cos^2(x))$ est toujours strictement positive.

iii) La dérivée $f'(x)$ est bien définie pour tout x réels. On cherche les point où $f'(x) = 0$, qui sont les zéros du numérateur. On a $\sin(x)\cos(x) = 0$ si et seulement si soit $\sin(x) = 0$, soit $\cos(x) = 0$, et donc pour $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et pour $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour déterminer la nature des points critiques on considère le changement de signe de la dérivée. Le dénominateur est toujours positif. Le numérateur $-\sin(x)\cos(x)$ change le signe de $+$ en $-$ à $x = k\pi$, et de $-$ en $+$ à $x = \pi/2 + k\pi$. Donc $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont les points de maximum local, et $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ – les points de minimum local.

Question 12. (2pts) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $c < d \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \to [c, d]$ une fonction bijective et continue. Quelles sont les valeurs possibles de $f(a) \in [c, d]$? Justifier votre réponse.
Corrigé. Comme la fonction f est bijective et continue, elle est strictement monotone. Donc elle atteint son minimum et maximum aux bornes de l'intervalle de définition. Alors les valeurs possible pour $f(a)$ sont $f(a) = c$ ou $f(a) = d$.

Question 13. (6pts)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x) = \sqrt{1 + 2\cos^2(x)}$.

i) (2 pt) Trouver le plus grand intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{4} \in [a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est injective.

ii) (2 pt) Soit $[a, b]$ l'intervalle trouvé dans la partie 1 de cette question. Trouver la fonction réciproque f^{-1} de $f(x)$ sur $[a, b]$ et son domaine de définition.

iii) (2 pt) Soit $f^{-1}(x)$ la fonction réciproque de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ trouvée dans la partie 2 de cette question. Trouver t dans le domaine de définition de f^{-1} tel que

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})}.$$

Corrigé.

i) Puisque la fonction est continue partout, elle doit être monotone sur un intervalle où elle est bijective. Le plus grand intervalle contenant $x = \frac{\pi}{4}$ où la fonction est monotone est entre son maximum local et son minimum local, donc $[0, \frac{\pi}{2}]$.

ii) L'équation $y = \sqrt{1 + 2\cos^2(x)}$ et la condition $\cos(x) > 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ impliquent $\cos(x) = \sqrt{\frac{y^2-1}{2}}$ et

$$x = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{y^2 - 1}{2}}\right).$$

Donc $f^{-1}(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{2}}\right)$. Pour trouver son domain de définition, on calcule $f(0) = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$, $f(\pi/2) = 1$. Alors le domaine de $f^{-1}(x)$ est $[1, \sqrt{3}]$.
Remarque: si on utilise la formule $y = \sqrt{2 + \cos(2x)}$, on obtient la fonction résiproque $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\left(x^2 - 2\right)$ sur le même domaine. En effet les deux fonctions sont égales sur l'intervalle $[1, \sqrt{3}]$.

iii) On utilise l'équation du cours $(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$. Alors il faut trouver $t \in [1, \sqrt{3}]$ tel que $f^{-1}(t) = \frac{\pi}{4}$, ce qui est equivalent à $t = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}$. Donc $t = \sqrt{2}$.

Question 14. (7pts)
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x+1)^2 e^x$.

i) Trouver tous les points d'extremums locaux de f et déterminer leur nature.

ii) Déterminer les intervalles de monotonicité de f.

iii) Trouver tous les points d'inflextion de f.

iv) Déterminer les intervalles de convexité de f.

v) Déterminer l'ensemble image de f.

Justifier vos réponses.

Corrigé.

i) La fonction $f(x)$ est un produit d'un polynôme et une fonction exponentielle, par consequence elle est indéfiniment dérivable. Donc si $x = a$ est un point d'extremum local de f sur $\mathbb{R}$, on a $f'(a) = 0$. La dérivée de la fonction est

$$f'(x) = 2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x = e^x(x+1)(x+3).$$

On a $f'(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = -3$. On voit que la dérivée change de signe au points $x = -1$ et $x = -3$, notamment $f'(x) > 0, x < -3$, $f'(x) < 0, -3 < x < -1$, et $f'(x) > 0, x > -1$. Alors le point $x = -3$ est un maximum local et $x = -1$ un minimum local de $f(x)$. On a $f(-3) = 4e^{-3}$ et $f(-1) = 0$.

ii) Selon le résultat du (*i*), les intervalles de monotonicité de f sont

$]-\infty, -3[$,	$f'(x) > 0$	f croissante
$]-3, -1[$,	$f'(x) < 0$	f decroinssante
$]-1, \infty[$,	$f'(x) > 0$	f croissante

iii) Pour trouver les points d'inflexion de f on trouve les intervalles de monotonicité de f'. Considérons la dérivée seconde de f:

$$f''(x) = e^x(x+1)(x+3) + e^x(x+3) + e^x(x+1) = e^x(x^2 + 6x + 7).$$

On a $f''(x) = 0$ pour $x = -3 \pm \sqrt{2}$, et $f''(x) = e^x(x + 3 + \sqrt{2})(x + 3 - \sqrt{2})$. Alors la dérivée seconde change de signe au points $x = -3 - \sqrt{2}$ et $x = -3 + \sqrt{2}$.

iv) Selon le résultat du (*iii*), les intervalles de convexité de f sont

$$\begin{array}{lll}]-\infty, -3-\sqrt{2}[, & f''(x) > 0 & f \text{ convexe} \\ ]-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}[, & f''(x) < 0 & f \text{ concave} \\ ]-3+\sqrt{2}, \infty[, & f''(x) > 0 & f \text{ convexe} \end{array}$$

v) La fonction e^x est positive, croissante et non-bornée, et $(x+1)^2$ est nonnegative et non-bornée. On a aussi $f(-1) = 0$. Donc $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

Question 15. (7pts)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$.

i) Citer le théorème des accroissements finis.

ii) Supposons que $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Démontrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$.

iii) Supposons que $f(0) = 0$, $f(5) = 1$ et $f(10) = 2$. Démontrer qu'il existe un point $c \in]0, 10[$ tel que $f''(c) = 0$. Montrer toutes les étapes de votre raisonnement.

Corrigé.

i) Soient $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ii) Soient $a < b$ deux nombres réels. Puisque $f \in C^2(\mathbb{R})$, le théorème des accroissement finis s'applique à la fonction f sur $[a, b]$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(c)|.$$

Puisque $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f'(c)| \leq 1$. Alors

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(c)| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |f(b) - f(a)| \leq |b - a|.$$

iii) On applique le théorème des accroissement finis à la fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ sur l'intervalle $[0, 5]$. Alors il existe un point $c_1 \in]0, 5[$ tel que

$$f'(c_1) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{1 - 0}{5 - 0} = \frac{1}{5}.$$

Maintenant on applique le théorème des accroissement finis à la fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ sur l'intervalle $[5, 10]$. Alors il existe un point $c_2 \in]5, 10[$ tel que

$$f'(c_2) = \frac{f(10) - f(5)}{10 - 5} = \frac{2 - 1}{10 - 5} = \frac{1}{5}.$$

Alors on obtient deux points $c_1 < c_2$ et la fonction $f'(x)$ qui est continue sur l'intervalle $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]c_1, c_2[$, parce que f est de classe $C^2(\mathbb{R})$. Donc le théorème des accroissements finis est applicable à la fonction f' sur $]c_1, c_2[$, et on obtient un point $c \in]c_1, c_2[$ tel que

$$f''(c) = \frac{f'(c_2) - f'(c_1)}{c_2 - c_1} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5}}{c_2 - c_1} = 0.$$

Alors on a trouvé un point $c \in]0, 10[$ tel que $f''(c) = 0$.