Anna Lachowska
19 décembre 2024

Analyse I – Série 14

Exercice 1. (Intégration par parties)

Objectif: Calculer les intégrales données par intégration par partie.
Théorie nécessaire: Méthode d'intégration par parties, cours 25.
Calculer les intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int x^2 \cos(x)\, dx$ *ii)* $\displaystyle\int e^{ax} \cos(bx)\, dx \qquad (a \neq 0)$

iii) $\displaystyle\int \arctan(x)\, dx$ *iv)* $\displaystyle\int x\, 2^{-x}\, dx$ *v)* $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sin^2(x)}$

vi) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)\, dx}{x^3}$ *vii)* $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ *viii)* $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\, dx$

ix) $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\, dx$ *x)* $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{e^x}\, dx$

Exercice 2. (Intégrales récurrentes)

Objectif: Trouver la formule récurrente par intégration par partie.
Théorie nécessaire: Méthode d'intégration par parties, cours 25.
Déduire une formule de récurrence pour les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

i) $\displaystyle\int x^n \sin(2x)\, dx$ *ii)* $\displaystyle\int (\ln x)^n\, dx$

Exercice 3. (Fonctions rationnelles)

Objectif: Calculer les intégrales des fonctions rationnelles.
Théorie nécessaire: Méthodes d'intégration des fonction rationnelles, cours 25.
Calculer les intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\, dx$ *ii)* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\, dx$ *iii)* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$

iv) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x}\, dx$ *v)* $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\, dx$ *vi)* $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\, dx$ *vii)* $\displaystyle\int \frac{4x}{x^4-1}\, dx$

Exercice 4. (Aire d'une surface plane)

Objectif: Trouver l'aire entre les courbes par intégration.
Théorie nécessaire: Méthodes d'intégration et exemples donnés aux cours 24, 25.
(i) Considerer la courbe

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, a], \qquad a > 1.$$

Tourner la page svp.

Trouver la valeur du paramètre a telle que l'aire du domaine entre la courbe et les droites $y = 0$, $x = 1$ et $x = a$, soit égale à 1.

(ii) Trouver l'aire de la région comprise entre les courbes

$$y = 2 - x^2 \quad \text{et} \quad y^3 = x^2.$$

Exercice 5. (Intégrales généralisées)

Objectif: Calculer les intégrales généralisées si elles convergent.
Théorie nécessaire: Méthodes de calcul des intégrales généralisées, cours 26.
Calculer les intégrales généralisées suivantes, si elles convergent.

$i)$ $I = \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{1}{x^p}\, dx\,, \quad p \in \mathbb{R}$

$ii)$ $I = \displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx\,, \quad p \in \mathbb{R}$

$iii)$ $I = \displaystyle\int_{0}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$iv)$ $I = \displaystyle\int_{0+}^{1/2} \frac{1}{x\ln(x)}\, dx$

$v)$ $I = \displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2}\, dx$

$vi)$ $I = \displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx$

$vii)$ $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin(x)\, e^{-x}\, dx$

$viii)$ $I = \displaystyle\int_{0+}^{\infty} e^{-x}(1-x)\ln(x)\, dx$

Exercice 6. (Fonctions hyperboliques)

Objectif: Expliquer le nom des fonction hyperboliques.
Théorie nécessaire: Calculer l'aire entre les courbes par intégration.

Soient $P = (x, y)$ et $Q = (x, -y)$ des points de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ $(x \geq 1)$ et t l'aire de la région comprise entre l'hyperbole et les rayons OP et OQ (aire grise sur la figure ci-contre). Montrer que $x = \cosh(t)$ et $y = \sinh(t)$.