Anna Lachowska
12 décembre 2024

Analyse I – Série 13

Exercice 1. (Séries entières)

Objectif: Trouver les rayons et domains de convergence des séries entières.
Théorie nécessaire: Méthodes et exemples donnés aux cours 22, 23.
Trouver les rayons et domaines de convergence des séries entières suivantes :

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^{2k-1}x^k$ *ii)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)\,3^k}(x-2)^k$

iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)^2\,3^k}(x-2)^k$ *iv)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)^3\,3^k}(x-2)^k$

Exercice 2. (Théorème de la moyenne)

Objectif: Utiliser le théorème de la moyenne pour estimer la valeur de l'intégrale donnée.
Théorie nécessaire: Théorème de la moyenne vu au cours 24.
Vérifier les deux inégalités

$$\frac{1}{54} < \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{5+x^3}\,dx < \frac{1}{5}\ .$$

Exercice 3. (Primitives)

Objectif: Trouver les primitives des fonctions de base.
Théorie nécessaire: Formules et méthodes d'intégration données aux cours 24, 25.
Trouver des primitives pour les fonctions f suivantes :

i) $f(x)=\sin(x)$ *ii)* $f(x)=\cos(x)$ *iii)* $f(x)=\tan(x)$

iv) $f(x)=e^x$ *v)* $f(x)=\sinh(x)$ *vi)* $f(x)=\cosh(x)$

vii) $f(x)=\ln(x)$ *viii)* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *ix)* $f(x)=(ax+b)^s \quad (s\neq -1, a\neq 0)$

x) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$ *xi)* $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ *xii)* $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$

xiii) $f(x)=\dfrac{1}{\tan(x)}$ *xiv)* $f(x)=xe^{x^2}$ *xv)* $f(x)=(ax^p+b)^s x^{p-1} \quad (s\neq -1,\ a,p\neq 0)$

Exercice 4. (Changement de variable, I)

Objectif: Calculer les intégrales données.
Théorie nécessaire: Méthodes de changement de variables, cours 24, 25.
Trouver des primitives pour les fonctions f en utilisant le changement de variable $x=\varphi(u)$ indiqué :

$$i)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \qquad x = \sin(u) \qquad\qquad ii)\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}\ , \qquad x = \tan(u)$$

$$iii)\ f(x) = \frac{1}{e^x+1}\ , \qquad x = \ln(t) \qquad\qquad iv)\ f(x) = x\sqrt{x-1}\ , \qquad x = t^2+1$$

Exercice 5. (Intégrales indéfinies)

Objectif: Calculer les intégrales données.
Théorie nécessaire: Méthodes d'intégration données aux cours 24, 25.
Calculer les intégrales suivantes :

$$i)\ \int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx \qquad ii)\ \int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx \qquad iii)\ \int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx \qquad iv)\ \int \frac{\sinh(x)}{e^x+1}\,dx$$

$$v)\ \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx \qquad vi)\ \int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}\,dx \qquad vii)\ \int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx \qquad viii)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Exercice 6. (Changement de variable, II)

Objectif: Calculer les intégrales données.
Théorie nécessaire: Méthodes de changement de variables, cours 24, 25.
Calculer les intégrales définies suivantes :

$$i)\ \int_0^{\pi/2} \sin^5(x)\,dx \qquad ii)\ \int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx \qquad iii)\ \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\,dx$$

Exercice 7. (Intégrale définie)

Objectif: Calculer l'intégrale donnée.
Théorie nécessaire: Méthodes d'intégration données aux cours 24, 25.
Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\,\cos(x^{33})\,x^{32}\,dx\ .$$

Exercice 8 (V/F fonctions dérivables)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant les fonctions dérivables.
Théorie nécessaire: Etude des fonction, cours 21.

Soit $a < b \in \mathbb{R}$, et soit $f : [a,b] \to F$ une fonction de classe $C^\infty(]a,b[,\ F)$.

(Q1) Si $f(x)$ n'est pas strictement croissante sur $[a,b]$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) \leq 0$.

(Q2) S'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) \leq 0$, alors $f(x)$ n'est pas strictement croissante sur $[a,b]$.

(Q3) Si la fonction $f(x)$ change de monotonie dans $]a,b[$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(Q4) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$ pour un $c \in]a,b[$, alors $f(x)$ admet un minimum local en $(c, f(c))$.

(Q5) Si $f'(c) = 0$ pour un $c \in]a,b[$, et f admet un maximum local en $(c, f(c))$, alors $f''(c) < 0$.

(Q6) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) = 0$ pour un $c \in]a,b[$, alors $(c, f(c))$ est un point d'inflection de f.

(Q7) Si $(c, f(c))$ est un point d'inflection pour un $c \in]a, b[$, alors $f'(c) = 0$.

(Q8) Si $f''(c) = ... = f^{(n-1)}(c) = 0$ et $f^{(n)}(c) \neq 0$ pour un $c \in]a, b[$ et un n impair, $n > 1$, alors $(c, f(c))$ est un point d'inflection.

(Q9) Si $(c, f(c))$ est un point d'inflection de f pour un $c \in]a, b[$, alors $f''(c) = 0$.

(Q10) Si $f'(x)$ est croissante sur $]a, b[$, alors $f(x)$ est convexe sur $]a, b[$.

(Q11) Si $f(x)$ est convexe sur $]a, b[$, alors $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.