EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
21 novembre 2024

Analyse I – Série 10

Exercice 1. (V/F : Continuité sur un intervalle)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant les fonctions continues sur un intervalle
Théorie nécessaire: Définitions et propriétés données au cours 17 et 18
Soient I un intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f.

Q1 : $f(I)$ est un intervalle.

Q2 : Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé.

Q3 : Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.

Q4 : Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

Q5 : Si I est borné, alors f atteint son minimum et son maximum sur I.

Q6 : Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.

Q7 : Si $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.

Q8 : Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

Exercice 2. (Prolongement par continuité)

Objectif: Etudier la possibilité de prolongement par continuité des fonctions données
Théorie nécessaire: Définition du prolongement par continuité et propriétés des limites vues au cours 15, 17
Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction f au point x_0, ou alors montrer que f ne peut être prolongée par continuité en x_0.

Q1 : $f\colon [0,1[\,\cup\,]1,\infty[\to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$ $\qquad$ en $x_0 = 1$

Q2 : Soit $A = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^{-1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
$f\colon]0,1] \setminus A \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ $\qquad$ en $x_0 \in A \cup \{0\}$

Q3 : $f\colon]1,2] \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \dfrac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3-3x+2}$ $\qquad$ en $x_0 = 1$

Exercice 3. (Propriétés de la dérivée)

Objectif: Démontrer les propriétés des dérivées des fonctions
Théorie nécessaire: Définition de la dérivée donnée au cours 18
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

Q1 : f paire $\quad\Rightarrow\quad f'$ impaire, Q2 : f impaire $\Rightarrow$ f' paire,

Q3 : f périodique $\Rightarrow$ f' périodique.

Exercice 4. (Calcul des dérivées)

Objectif: Calculer les dérivées des fonctions données.
Théorie nécessaire: Définition et propriétés des dérivées donnée aux cours 18, 19.
Calculer la dérivée f' de la fonction f et donner les domaines de f et f'.

i) $f(x) = \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$ *ii)* $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ *iii)* $f(x) = (\sin(x))^2 \cdot \cos(x^2)$

iv) $f(x) = \tan(x)$ (sans formulaire!) *v)* $f(x) = \sqrt{\sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)}$

vi) $f(x) = \sqrt[5]{\big(2x^4 + e^{-(4x+3)}\big)^3}$ *vii)* $f(x) = \log_3\big(\log_2(x)\big)$

viii) $f(x) = \ln\big(4^{\sin(x)}\big)e^{\cos(4x)}$ *ix)* $f(x) = \dfrac{3^x \cos(x)}{2^{\sqrt{x^2+1}}}$

Exercice 5. (Dérivabilité)

Objectif: Etudier l'existence et continuité de la dérivée des fonctions qui dépendent d'un paramètre.
Théorie nécessaire: Propriétés des dérivées données aux cours 18, 19.
Déterminer toutes les valeurs de l'entier m pour lesquelles la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une dérivée au point $x = 0$.
Pour lesquelles de ces valeurs m la dérivée f' est-elle continue au point $x = 0$?

i) $f(x) = \begin{cases} \sin(x^m)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ *ii)* $f(x) = \begin{cases} x^m \sin\big(\frac{1}{x}\big)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

Exercice 6. (Dérivabilité)

Objectif: Etudier l'existence et continuité de la dérivée des fonctions qui dépendent des paramètres.
Théorie nécessaire: Propriétés des dérivées données aux cours 18, 19.
(a) Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dérivable partout, où :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta\,, & x > 1 \end{cases}$$

(b)* Déterminer $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dérivable partout, où :

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x)\sin\big(\frac{1}{x}\big)\,, & x \neq 0 \\ \beta\,, & x = 0 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{R}$ la dérivée est-elle continue en $x = 0$?

Exercice 7. (Dérivée d'une composée des fonctions)

Objectif: Calculer les dérivées des fonctions composées.
Théorie nécessaire: Propriétés des dérivées donnée aux cours 18, 19.
Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

Q1 : $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\sin(x)^7\cos(x)^4$ et $g(x) = \ln(x)^3$.

Q2 : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ et $g(x) = (x-1)^4$.

Exercice 8. (V/F : Dérivation)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant la dérivabilité des fonctions
Théorie nécessaire: Définitions et propriétés données au cours 18 et 19
Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions.

Q1 : Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $]a-\delta, a+\delta[$.

Q2 : Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a.

Q3 : Si f est dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I.

Q4 : Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) = \sqrt{f^2(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q5 : Si f est bijective et dérivable sur un intervalle I avec la dérivée $f'(x) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est aussi dérivable sur I et $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Q6 : Si $f(x) = x + e^x$, alors $(f^{-1})'(1) = 1 + \frac{1}{e}$.

Q7 : Si $f(x)$ est dérivable en $x = x_0$, alors $(f \circ f)(x)$ est aussi dérivable en $x = x_0$.

Q8 : Si f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(a) = 0$, alors $(f \circ f \circ f \circ f \circ f)'(a) = 0$.