Anna Lachowska

Analyse I – Série 9

Exercice 1. (Limites des fonctions -1)

Objectif: Calculer les limites des fonctions données.
Théorie nécessaire: Propriétés des limites et limites remarquables données aux cours 14, 15.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer les limites suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$ *iii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{\sin(x^2)}$

iv) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ *v)* $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$ *vi)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

Exercice 2. (Limites des fonctions - 2)

Objectif: Calculer les limites des fonctions données.
Théorie nécessaire: Propriétés des limites et limites remarquables données aux cours 14, 15.
Calculer les limites suivantes :

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}-1}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-\cos x}{x^2}$ *iv)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}-1\right)$

v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{3x^2}$ *vi)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x^2}}{\sqrt{1+5x^2}-1}$

Exercice 3. (Existence des limites)

Objectif: Etudier l'existence des limites des fonctions qui dépend des paramètre.
Théorie nécessaire: Propriétés des limites et limites remarquables données aux cours 14, 15.
Trouver les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les limites suivantes existent dans $\mathbb{R}$:

i) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{\tan^2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}$ *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{x^4-2\alpha x^3+4x^2}{(x-\alpha)^2}$ *iii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\alpha|x|}{\sqrt{x^2+\beta\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}}$

Astuce: distinguer trois cas pour β: $\beta=0, \beta<0$ et $\beta>0$.

Exercice 4. (Continuité à gauche et à droite)

Objectif: Etudier la continuité des fonctions à gauche et à droite.
Théorie nécessaire: Définition des limites et continuité à gauche et à droite données aux cours 15, 17.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}\,, & x > 3 \\ \alpha\,, & x = 3 \\ \beta x - 4\,, & x < 3 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

i) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ *ii)* $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ *iii)* $\left(2, \frac{5}{3}\right)$ *iv)* $(1, 2)$ *v)* $(2, 2)$

Exercice 5. (Continuité)

Objectif: Etudier la continuité des fonctions à gauche et à droite du point donné.
Théorie nécessaire: Définition de la continuité et exemples donnés aux cours 15, 17.
Etudier la continuité de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $x = 0$:

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{1/x}}\,, & x \neq 0 \\ 1\,, & x = 0 \end{cases}$ *ii)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}\,, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}\,, & x = 0 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \cos(1/x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ *iv)* $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

Exercice 6. (Théorème de la valeur intermédiaire)

Objectif: Appliquer le TVI pour démontrer l'existence des solutions des équations données.
Théorie nécessaire: Théorème de la valeur intermédiaire et ses applications discutées au cours 17.
Montrer que les équations suivantes admettent des solutions dans leurs domaines de définition :

i) $e^{x-1} = x + 1$ *ii)* $x^2 - \dfrac{1}{x} = 1$

Montrer que les équations suivantes admettent au moins deux solutions dans $\mathbb{R}$:

iii) $(x - 2)\cos x = \sin x$ *iv)* $xe^x - x^5 = 1$