

## Analyse I – Série 8

### Exercice 1. (Convergence des séries)

**Objectif:** Appliquer les critères de convergence pour déterminer si les séries convergent ou divergent

**Théorie nécessaire:** Critères de convergences proposés au cours 11

Déterminer si la série donnée converge ou diverge :

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1} \quad ii) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n+1} \right)^n \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1} \quad v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \quad vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$$

vii) Trouver toutes les valeurs du paramètre  $p \in \mathbb{N}^*$  telles que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(pn)!}$  converge.

### Exercice 2. (Domaine, parité, périodicité)

**Objectif:** Etudier les propriétés des fonctions données

**Théorie nécessaire:** Définitions des propriétés des fonction données au cours 12

Donner le domaine et étudier la parité et la périodicité des fonctions  $f$  suivantes en donnant la période le cas échéant :

$$i) f(x) = \frac{x^4 \cos(3x)}{1 + \sin(x)^2} \quad ii) f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$$

iii)  $f(x) = (x - [x])^2$ , où  $[x]$  est la partie entière du nombre réel  $x$  (c.-à-d.  $[x] \in \mathbb{Z}$  tel que  $[x] \leq x < [x] + 1$ ).

$$iv) f(x) = x \sin x^2 + x^2 \sin(x) \quad v) f(x) = \frac{2x^2 + 1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}.$$

### Exercice 3. (Fonctions monotones)

**Objectif:** Déterminer si la fonction composée est monotone

**Théorie nécessaire:** Définition de la monotonie des fonction donnée au cours 12

Soient les fonctions  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Déterminer la monotonie de leur composée  $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si

i)  $f$  et  $g$  sont croissantes,

ii)  $f$  et  $g$  sont décroissantes,

iii)  $f$  est croissante et  $g$  est décroissante. Considérer les deux cas,  $g \circ f$  et  $f \circ g$ .

**Exercice 4.** (Fonctions bijectives et réciproques) **Objectif:** Etudier la bijectivité des fonctions et construire les fonctions réciproques

**Théorie nécessaire:** Définitions et exemples donnés dans le cours 12

- i) Soient les fonctions  $f: A \rightarrow B$  et  $g: B \rightarrow A$  telles qu'on ait pour tout  $x \in A$  que  $(g \circ f)(x) = x$  et pour tout  $y \in B$  que  $(f \circ g)(y) = y$ . Montrer que  $f$  est bijective et que  $g = f^{-1}$ .
- ii) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction impaire. Montrer que si  $f$  est bijective, alors sa fonction réciproque est aussi impaire.
- iii) Soit  $f(x) = \sqrt{x+3} - 2$ . Trouver le plus grand domaine où la fonction est bijective. Calculer la fonction réciproque et son domaine de définition.
- iv) Soit  $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ . Trouver un plus grand domaine où la fonction est bijective. Calculer la fonction réciproque et son domaine de définition. Astuce: par convention, la fonction  $\text{Arccos}(y)$ ,  $y \in [-1, 1]$  est réciproque à la fonction  $\cos(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

**Exercice 5.** (Transformations des graphiques)

**Objectif:** Obtenir les graphiques des fonctions à partir des graphiques des fonctions connues

**Théorie nécessaire:** Transformations des graphiques discutées dans le cours 1

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction représentée à la page 4. Tracer sur la même figure les graphiques des fonctions  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

- i)  $g(x) = f(-x)$
- ii)  $g(x) = f(x - 5)$
- iii)  $g(x) = f(2x)$
- iv)  $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

**Exercice 6.** (Composition des fonctions)

**Objectif:** Calculer les fonctions composée

**Théorie nécessaire:** Définition d'une fonction composée donnée au cours 12

Pour les deux fonctions  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies ci-dessous, calculer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$$

**Exercice 7.** (V/F : Propriétés des fonctions)

**Objectif:** Interpréter et évaluer les énoncés concernant les propriétés des fonctions

**Théorie nécessaire:** Définitions et propriétés données au cours 12

Soient  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions.

Q1: Si  $f$  est strictement monotone, alors  $f$  est injective.

Q2: Si  $f$  est injective, alors  $f$  est monotone.

Q3: Si  $f$  est bijective et croissante, alors son inverse  $f^{-1}$  est décroissante.

Q4: Si  $f$  est bijective et  $f^{-1}$  est décroissante, alors  $f$  est aussi décroissante.

Q5: Si  $f + g$  est décroissante, alors  $f$  et  $g$  sont décroissantes.

Q6: Si  $f \cdot g$  est décroissante, alors  $f$  et  $g$  sont décroissantes.

**Exercice 8.**(Limites des fonctions à partir de la définition )

**Objectif:** Démontrer les limites à partir de la définition et par le critère des suites

**Théorie nécessaire:** Définition de la limite et la caractérisation de la limite à partir des suites donnée au cours 13

Démontrer les limites suivantes à partir de la définition de la limite (a) avec  $\varepsilon - \delta$ , (b) à partir des suites.

$$Q1: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2 + 1} = 1$$

$$Q2: \lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3 \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

$$Q3: \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \text{ pour tout } a > 0.$$

*Astuce:* Pour (a) il faut donner un  $\varepsilon > 0$  et trouver  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $x : 0 < |x - x_0| \leq \delta$ , on a  $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ . Pour (b), il faut donner une suite arbitraire  $(a_n)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , et démontrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ .

Complément à l'Exercice 5.

