

Analyse I – Série 8

Exercice 1. (Convergence des séries)

Objectif: Appliquer les critères de convergence pour déterminer si les séries convergent ou divergent

Théorie nécessaire: Critères de convergences proposés au cours 11

Déterminer si la série donnée converge ou diverge :

$$\begin{array}{lll}
 i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1} & ii) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n & iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} \\
 iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1} & v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} & vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}
 \end{array}$$

vii) Trouver toutes les valeurs du paramètre $p \in \mathbb{N}^*$ telles que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(pn)!}$ converge.

Exercice 2. (Domaine, parité, périodicité)

Objectif: Etudier les propriétés des fonctions données

Théorie nécessaire: Définitions des propriétés des fonction données au cours 12

Donner le domaine et étudier la parité et la périodicité des fonctions f suivantes en donnant la période le cas échéant :

$$\begin{array}{ll}
 i) f(x) = \frac{x^4 \cos(3x)}{1 + \sin(x)^2} & ii) f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{3}x\right) \\
 iii) f(x) = (x - [x])^2, \text{ où } [x] \text{ est la partie entière du nombre réel } x \text{ (c.-à-d. } [x] \in \mathbb{Z} \text{ tel que } [x] \leq x < [x] + 1). \\
 iv) f(x) = x \sin x^2 + x^2 \sin(x) & v) f(x) = \frac{2x^2 + 1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}.
 \end{array}$$

Exercice 3. (Fonctions monotones)

Objectif: Déterminer si la fonction composée est monotone

Théorie nécessaire: Définition de la monotonie des fonction donnée au cours 12

Soient les fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Déterminer la monotonie de leur composée $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si

- i) f et g sont croissantes,
- ii) f et g sont décroissantes,
- iii) f est croissante et g est décroissante. Considérer les deux cas, $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 4. (Fonctions bijectives et réciproques) **Objectif:** Etudier la bijectivité des fonctions et construire les fonctions réciproques

Théorie nécessaire: Définitions et exemples donnés dans le cours 12

- i) Soient les fonctions $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow A$ telles qu'on ait pour tout $x \in A$ que $(g \circ f)(x) = x$ et pour tout $y \in B$ que $(f \circ g)(y) = y$. Montrer que f est bijective et que $g = f^{-1}$.
- ii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si f est bijective, alors sa fonction réciproque est aussi impaire.
- iii) Soit $f(x) = \sqrt{x+3} - 2$. Trouver le plus grand domaine où la fonction est bijective. Calculer la fonction réciproque et son domaine de définition.
- iv) Soit $f(x) = \cos(x^2 + 1)$. Trouver un plus grand domaine où la fonction est bijective. Calculer la fonction réciproque et son domaine de définition. Astuce: par convention, la fonction $\text{Arccos}(y)$, $y \in [-1, 1]$ est réciproque à la fonction $\cos(x)$, $x \in [0, \pi]$.

Exercice 5. (Transformations des graphiques)

Objectif: Obtenir les graphiques des fonctions à partir des graphiques des fonctions connues

Théorie nécessaire: Transformations des graphiques discutées dans le cours 1

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction représentée à la page 4. Tracer sur la même figure les graphiques des fonctions $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

- i) $g(x) = f(-x)$
- ii) $g(x) = f(x - 5)$
- iii) $g(x) = f(2x)$
- iv) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

Exercice 6. (Composition des fonctions)

Objectif: Calculer les fonctions composées

Théorie nécessaire: Définition d'une fonction composée donnée au cours 12

Pour les deux fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies ci-dessous, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$$

Exercice 7. (V/F: Propriétés des fonctions)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant les propriétés des fonctions

Théorie nécessaire: Définitions et propriétés données au cours 12

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- Q1: Si f est strictement monotone, alors f est injective.
- Q2: Si f est injective, alors f est monotone.
- Q3: Si f est bijective et croissante, alors son inverse f^{-1} est décroissante.
- Q4: Si f est bijective et f^{-1} est décroissante, alors f est aussi décroissante.

Q5: Si $f + g$ est décroissante, alors f et g sont décroissantes.

Q6: Si $f \cdot g$ est décroissante, alors f et g sont décroissantes.

Exercice 8.(Limites des fonctions à partir de la définition)

Objectif: Démontrer les limites à partir de la définition et par le critère des suites

Théorie nécessaire: Définition de la limite et la caractérisation de la limite à partir des suites donnée au cours 13

Démontrer les limites suivantes à partir de la définition de la limite (a) avec $\varepsilon - \delta$, (b) à partir des suites.

Q1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2 + 1} = 1$

Q2: $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Q3: $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ pour tout $a > 0$.

Astuce: Pour (a) il faut se donner un $\varepsilon > 0$ et trouver $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $x : 0 < |x - x_0| \leq \delta$, on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$. Pour (b), il faut se donner une suite arbitraire (a_n) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, et démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

Complément à l’Exercice 5.

