EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
3 octobre 2024

Analyse I – Série 4

Exercice 1. (Raisonnement par récurrence)

Objectif: Appliquer la méthode de démonstration par récurrence
Théorie nécessaire: Méthode et exemples donnés dans le cours 6
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (progression arithmétique);

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (somme de carrés d'entiers);

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (somme des inverses des produits de deux entiers successifs);

iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ (somme de cubes d'entiers).

v) Calculer $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{1000}(k+1)(3k+2)$.

vi) Calculer $\displaystyle T = \sum_{k=1}^{476}\left(k^2 - (k-1)^2\right)$.

Exercice 2. (Raisonnement par récurrence)

Objectif: Appliquer la méthode de démonstration par récurrence en cas d'un produit de n termes
Théorie nécessaire: Méthode et exemples donnés dans le cours 6
Soit pour $n \in \mathbb{N}$ les nombres de Fermat $F_n := 2^{(2^n)} + 1$. Démontrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation de récurrence

$$F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2\ .$$

Exercice 3. (Encore une somme)

Objectif: Trouver la formule qui depend de n et la démontrer par récurrence
Théorie nécessaire: Méthode et exemples donnés dans le cours 6
Trouver une expression pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a+kd)$ pour tout couple $a, d \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, et la démontrer par récurrence.

Tourner la page svp.

Exercice 4. (Binôme de Newton)

Objectif: Méthode de récurrence et manipulations avec des sommes, en particulier le changement d'indice dans une somme
Théorie nécessaire: Méthode de récurrence donnée dans le cours 6 et le fichier "changement d'indice" qui ce trouve sur Moodle

Soit $k, n \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq k \leq n$. On définit le coefficient binomial C_n^k par

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

i) Vérifier à partir de la définition des coefficients binomiaux que pour tout $n \geq k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \ .$$

ii) Montrer que pour tous les nombres x, y et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \ .$$

iii) En déduire que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ .$$

Exercice 5. (Nombres de Fibonacci)

Objectif: Méthode de récurrence et manipulations avec des sommes, en particulier le changement d'indice dans une somme
Théorie nécessaire: Méthode de récurrence donnée dans le cours 6 et le fichier "changement d'indice" qui ce trouve sur Moodle
Les nombres de Fibonacci sont définis comme suit:

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

Vérifier par récurrence la propriété des coefficients binomiaux

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = f_{n+1}.$$

(par convention on suppose que $\binom{p}{q} = 0$ si $q > p$). Astuce: Utiliser propriété *i*) de l'Exercice 4.

Exercice 6. (Infimum, supremum)

Objectif: Trouver l'infimum et le supremum d'un ensemble donné
Théorie nécessaire: Définition et exemples donnés à la fin du cours 2
Soit $a_n = \dfrac{5n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer

i) $\inf a_n$ *ii*) $\sup a_n$

Exercice 7. (Infimum, supremum)

Objectif: Trouver l'infimum et le supremum d'un ensemble donné
Théorie nécessaire: Définition et exemples donnés à la fin du cours 2
Déterminer si la suite (a_n) est monotone; trouver, s'il existe, le supremum et l'infimum et décider s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

i) $a_n = n^2 - 4n + 1, \ \ n \in \mathbb{N}$ *ii)* $a_n = \dfrac{n}{3n-1}, \ \ n \in \mathbb{N}^*$ *iii)* $a_n = \dfrac{n}{3n-1}, \ \ n \in \mathbb{N}$

Exercice 8. (Propriétés algébriques de la limite)

Objectif: Appliquer les transformations algébriques et les propriétés algébriques des limites pour trouver les limites données
Théorie nécessaire: Propriétés des limites discutées dans le cours 7
Soit $a_n = \dfrac{3n}{n+2}, \ \ n \in \mathbb{N}$. Calculer

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$ *iii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{3} + \dfrac{3}{a_n}\right)$