Catalogue

EPFL

Ens: A. Lachowska
Analyse I - (n/a)
13 janvier 2020
3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages (les dernières pouvant être vides), et 31 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [`QCM-complexes-A`] **:** La partie imaginaire de $\left(-1+i\sqrt{3}\,\right)^5$ est

■ $-16\sqrt{3}$ ☐ $32\sqrt{3}$ ☐ $32\sqrt{3}\,i$ ☐ $16\sqrt{3}$

Question [`QCM-contin-deriv-C1-B`] **:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\,\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right) & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Alors

☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais f' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

■ f est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable à gauche mais pas à droite en $x = 0$.

☐ f est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable à droite mais pas à gauche en $x = 0$.

☐ f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Question [`QCM-cont-vs-derivab-A`] **:** Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (ax+1)(bx-1) & \text{si } x \geq 0, \\ \sin(a^2x) - b & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est-elle dérivable en $x = 0$?

☐ $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ et $b = -1$

■ $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ et $b = 1$

☐ $a = \pm 1$ et $b = -1$

☐ $a = \pm 1$ et $b = 1$

Question [`QCM-dev-limite-B`] **:** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. Le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ est donné par

■ $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{24} + x^3\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$

Catalogue

Question [`QCM-suites-recurrence-B`] : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{3^n}$. Alors

■ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x_0 - \frac{3}{2}$.

□ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

□ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x_0.

□ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est divergente.

Question [`QCM-inf-sup-A`] : Soit $A = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \;:\; \dfrac{1}{\mathrm{Log}(x)} < 1\right\}$. Alors

■ $\mathrm{Inf}\, A = 0$

□ A n'est pas minoré

□ $\mathrm{Inf}\, A = \mathrm{e}$

□ $\mathrm{Sup}\, A = \mathrm{e}$

Question [`QCM-integrale-first-A`] : Soit $I = \displaystyle\int_0^2 \exp(x^2)\,\mathrm{d}x$. Alors

■ $2 \leq I \leq 200$

□ $I \geq 200$

□ $I = \exp\left(\frac{8}{3}\right) - 1$

□ $0 \leq I < \frac{14}{3}$

Question [`QCM-integrale-second-B`] : Soit l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{Log}(1+x)\,\mathrm{d}x$. Alors

■ $I = \frac{3}{2}\mathrm{Log}(3) - \frac{1}{4}$

□ $I = 2\,\mathrm{Log}(3) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(2)$

□ $I = 2\,\mathrm{Log}(3) - \frac{1}{2}\mathrm{Log}(2)$

□ $I = \frac{1}{2}\mathrm{Log}(2) + \frac{1}{4}$

Question [`QCM-int-generalisee-B`] : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^{3/2}+3}{x^3}\,dx$

■ converge et vaut $\frac{7}{2}$

□ converge et vaut $\frac{8}{3}$

□ converge et vaut $-\frac{7}{2}$

□ diverge

Question [`QCM-limite-prolongmt-A`] : Parmi les fonctions $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ x\,\mathrm{Log}(|x|) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

déterminer celles qui sont continues en $x = 0$:

■ f et h

□ f et g

□ g et h

□ toutes les trois

Catalogue

Question [`QCM-limsup-liminf-B`] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie ainsi: pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) .$$

Alors

- ■ $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$
- □ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\sqrt{2}$
- □ $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$
- □ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n = -2$

Question [`QCM-serie-B`] : Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors

- ■ les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ convergent.
- □ la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mais ne converge pas absolument.
- □ la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- □ la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverge.

Question [`QCM-serie-entiere-B`] : Soit R le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(n^b)} x^n$.

- ■ Si $b = 2$, alors $R = 1$.
- □ Si $b = 3$, alors $R = e$.
- □ Si $b = 1$, alors $R = e^{-1}$.
- □ Si $b = 4$, alors $R = e^2$.

Question [`QCM-serie-parametre-B`] : La série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^{\frac{2}{\alpha}}\left(n^{2\alpha}+1\right)}}$ converge si

- ■ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
- □ $1 < \alpha < 2$
- □ $\alpha = \frac{1}{2}$
- □ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Question [`QCM-suites-convergence-C`] : La limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5n + \sqrt{3n - \sqrt{2n}}}}$

- ■ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- □ n'existe pas
- □ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{6}}$
- □ existe et vaut $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{3-\sqrt{2}}}}$

Question [`QCM-suites-recurrence-A`] : Soit $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$, et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour un $x_0 \in \mathbb{R}^*$ fixé.

- ■ Si $x_0 = -2$, la suite converge vers $-\sqrt{2}$.
- ☐ Si $x_0 = 1$, la suite converge vers $-\sqrt{2}$.
- ☐ Si $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la suite converge vers $-\sqrt{2}$.
- ☐ Il n'existe aucun $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pour lequel la suite converge vers $-\sqrt{2}$.

Question [`QCM-theo-accr-finis-B-NEW`] : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x\cos(x)|$.

- ■ Il existe $u \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- ☐ Il existe $u \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$ tel que $f'(u) = 0$.
- ☐ f est croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- ☐ Sur $\mathbb{R}$, f possède un unique point de minimum local.

Question [`QCM-val-intermed-image-interv-B`] : Soit $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin\left(\operatorname{Arctg}(\sqrt{x}\,)\right)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

☐ $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ ☐ $]0, 1]$ ■ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$ ☐ $[-1, 1]$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [`TF-complexes-B`] : Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, il existe une infinité de nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Im}\,(\omega z) = 0$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-cont-deriv-C1-A`] : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en x_0, alors la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(f(x))$ est également dérivable en x_0.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-derivabilite-discussion-B`] : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors f est continue en exactement deux points.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-dev-limite-C`] : Soit $f\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 dont le développement limité d'ordre 2 autour de $x_0 = 0$ est donné par $f(x) = 1 + 2x + x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$. Alors la fonction $(f(x))^2$ admet le développement limité $(f(x))^2 = 1 + 4x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$ autour de $x_0 = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-fonction-etc-A`] : Une fonction strictement croissante $f : [0,1] \to [0,1]$ est toujours bijective.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-induction-suites-limites-B`] : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et bornée, et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n le réel défini par $a_n = f(n)$. Alors $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-integrale-A] **:** Soit $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction bijective et continue, telle que $f(0) = 0$. Alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-limite-continuite-B] **:** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)\,.$$

Alors f est dérivable à gauche en x_0.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-serie-B] **:** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-serie-entiere-A] **:** Le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (3x)^k$ vaut 3.

☐ VRAI ■ FAUX