Ens. A. Lachowska - Analyse I - (n/a)

14 janvier 2019 - durée : 3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

– Posez votre carte d'étudiant sur la table.

– **Aucun** document n'est autorisé.

– L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.

– Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
-1 point si la réponse est incorrecte.

– Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
-1 point si la réponse est incorrecte.

– Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.

– Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [`QCM-complexes-B`] : Soit S l'ensemble des solutions de l'équation complexe $\overline{z}^2 = z^2$. Alors :

- [ ] $S = \{-1, +1, -\mathrm{i}, +\mathrm{i}\}$
- [ ] $S = \emptyset$
- [x] $S = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ ou } \mathrm{Im}(z) = 0\}$
- [ ] $S = \mathbb{R}$

Question [`QCM-contin-deriv-C1-B`] : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\,|\cos(x)|$. Alors :

- [ ] f est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en $x = 0$
- [x] f est dérivable en $x = 0$, mais pas en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- [ ] f n'est pas deux fois dérivable en $x = 0$
- [ ] f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

Question [`QCM-contin-vs-derivab-B`] : Soit $p \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x|^p \operatorname{Log}(|x|) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

- [x] Si $p = \frac{6}{5}$, alors f est dérivable en $x = 0$.
- [ ] Si $p = \frac{1}{2}$, alors f n'est pas continue en $x = 0$.
- [ ] Si $p = \frac{3}{2}$, alors f n'est pas dérivable en $x = 0$.
- [ ] Si $p = \frac{2}{3}$, alors f est continue à droite en $x = 0$, mais pas à gauche.

Question [`QCM-dev-limite-A`] : Le polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-\sin(x)}$ est

- [ ] $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$
- [x] $1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4$
- [ ] $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4$
- [ ] $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

Question [`QCM-induction-A-2`] : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$. Alors :

- [x] $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$
- [ ] $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
- [ ] $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$
- [ ] $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Question [`QCM-inf-sup-E`] : Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A = \left\{x > 0 \,:\, \cos\left(\frac{1}{x}\right) > 0\right\}$. Alors :

- [x] $\operatorname{Inf} A = 0$
- [ ] $\operatorname{Sup} A = \dfrac{\pi}{2}$
- [ ] $\operatorname{Sup} A = 0$
- [ ] $\operatorname{Inf} A = \dfrac{2}{\pi}$

Catalogue

Question [`QCM-int-generalisee-A`] **:** L'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_{0^+}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,\mathrm{d}x$

- [x] converge, et sa valeur est $I = \sqrt{2}$
- [ ] converge, et sa valeur est $I = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(\frac{1}{2})$
- [ ] diverge, car $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{Log}\big(\sqrt{\sin(\varepsilon)}\,\big) = -\infty$
- [ ] diverge, car $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ n'est pas définie en $x = 0$

Question [`QCM-integrale-first-A`] **:** Soit l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}\,\mathrm{d}x$. Alors :

- [x] $I = \frac{4}{3} - 4\operatorname{Log}(\frac{4}{3})$
- [ ] $I = \operatorname{Log}(2) + \frac{1}{2}$
- [ ] $I = \frac{5}{3} - 4\operatorname{Log}(\frac{3}{2})$
- [ ] $I = 2\operatorname{Log}(2) + 1$

Question [`QCM-integrale-second-A`] **:** Soit l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x$. Alors :

- [x] $I = 2\big(\operatorname{Arctg}\big(\sqrt{3}\,\big) - \frac{\pi}{4}\big)$
- [ ] $I = 2\big(\sqrt{3} - 1\big) + \operatorname{Log}(2)$
- [ ] $I = \frac{1}{2}\big(\operatorname{Arctg}(3) - \frac{\pi}{4}\big)$
- [ ] $I = \sqrt{3} - 1 + \operatorname{Log}(2)$

Question [`QCM-limite-prolongmt-B`] **:** Soit $m \in \mathbb{R}$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{\operatorname{Log}\big(1 + 2x^2\big)} & \text{si } x < 0\,, \\ m & \text{si } x = 0\,, \\ \dfrac{x+1}{x^2 + 3x + 1} & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

- [x] Si $m = \frac{1}{2}$, alors f est continue à gauche mais pas à droite en $x = 0$.
- [ ] Si $m = \frac{1}{3}$, f est continue à droite mais pas à gauche en $x = 0$.
- [ ] Si $m = 1$, alors f est continue en $x = 0$.
- [ ] Si $m = \frac{1}{2}$, alors f est continue en $x = 0$.

Question [`QCM-limsup-liminf-B`] **:** Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \sqrt[n]{7}$ si n est pair et $x_n = \dfrac{1}{n^7}$ si n est impair. Alors :

- [x] $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
- [ ] $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
- [ ] $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$
- [ ] $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

Question [`QCM-propriete-fonction-A`] **:** Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}}$. Alors :

- [x] f possède un seul point de minimum local dans $\mathbb{R}$
- [ ] f possède un seul point de maximum local dans $\mathbb{R}$
- [ ] f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- [ ] f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Question [`QCM-serie-B`] **:** Soit $\lambda = -\frac{1}{6}$. Déterminer, parmi les séries ci-dessous, celle qui converge.

■ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^n$ □ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^n$ □ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^n}$ □ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$

Question [`QCM-serie-entiere-A`] **:** Soit $f : \mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4}{2+3x}$. La série de Taylor de f autour de $x = 2$ est:

■ $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\tfrac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in \left]-\tfrac{2}{3}, \tfrac{14}{3}\right[$

□ $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{3}{8}\right)^k (x+2)^k$ pour $x \in \left]-\tfrac{14}{3}, \tfrac{2}{3}\right[$

□ $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in \left]-\tfrac{2}{3}, \tfrac{14}{3}\right[$

□ $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\tfrac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in \left]1, 3\right[$

Question [`QCM-serie-parametre-B`] **:** Soit s un paramètre réel, et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $b_n = \dfrac{1}{n^s}$ si n est pair, $b_n = \dfrac{1}{n^{2s}}$ si n est impair. Alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si et seulement si

■ $s > 1$ □ $s > \frac{1}{2}$ □ $s > 0$ □ $s > 2$

Question [`QCM-suites-convergence-A`] **:** Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \dfrac{2^{2n}}{(7n)!}$. Lorsque $n \to \infty$, cette suite

■ converge vers 0

□ converge vers $\dfrac{4}{7}$

□ diverge

□ converge vers $\dfrac{\operatorname{Log}(2)}{7}$

Question [`QCM-suites-recurrence-B`] **:** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8a_n - 7}$. Alors :

□ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

□ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

■ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

□ la suite est divergente

Question [`QCM-theo-accr-finis-B`] **:** Soit $f :]-3, 2[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Alors pour tous les $x \in]-3, 2[$ et $y \in]-3, 2[$, tels que $x \neq y$, on a:

□ $-1 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 9$

■ $-2 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 8$

□ $-3 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 7$

□ $-4 \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 6$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [`TF-complexes-C`] **:** Soit $z \neq 0$ un nombre complexe dont l'argument vaut $\frac{\pi}{4}$. Alors l'argument du nombre complexe $\frac{1}{z^2}$ vaut $-\frac{\pi}{2}$.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-derivabilite-discussion-B`] **:** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que l'équation $f'(x) = 0$ possède exactement une solution. Alors l'équation $f(x) = 1$ possède au plus deux solutions réelles distinctes.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-dev-limite-B`] **:** Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^5 dont le développement limité d'ordre 4 en $x = 0$ est donné par

$$f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x),$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors $f'(0) + 3f^{(2)}(0) + f^{(3)}(0) = 1$.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-fonction-etc-B`] **:** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Alors f est strictement monotone.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-induction-suites-limites-A`] **:** Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 2$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{n}$. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-inf-sup-B`] **:** Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné, et $B = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ est un majorant de } A\}$. Alors $\operatorname{Inf} B \in B$.

■ VRAI □ FAUX

Question [`TF-integrale-B`] **:** La fonction $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \int_0^{|x|} 1 \, dt$ est dérivable en $x = 0$.

□ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-limites-continuite-A`] **:** Soit $f\colon [-2,20] \to [0,1]$ une fonction continue. Alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-serie-AA`] **:** La série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-serie-entiere-B`] **:** La série entière $\sum_{k=100}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

■ VRAI ☐ FAUX