Ens. A. Lachowska - Analyse I - (n/a)

14 janvier 2019 - durée : 3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  +3 points si la réponse est correcte,

  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,

  −1 point si la réponse est incorrecte.

- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

  +1 point si la réponse est correcte,

  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,

  −1 point si la réponse est incorrecte.

- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐ ☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\,|\cos(x)|$. Alors :

- ☐ f est dérivable en $x = 0$, mais pas en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ f est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en $x = 0$
- ☐ f n'est pas deux fois dérivable en $x = 0$
- ☐ f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

Question 2 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$. Alors :

- ☐ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$
- ☐ $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Question 3 : Le polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-\sin(x)}$ est

- ☐ $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$
- ☐ $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$
- ☐ $1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4$
- ☐ $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4$

Question 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}}$. Alors :

- ☐ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- ☐ f possède un seul point de minimum local dans $\mathbb{R}$
- ☐ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- ☐ f possède un seul point de maximum local dans $\mathbb{R}$

Question 5 : Soit $m \in \mathbb{R}$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{\mathrm{Log}\big(1+2x^2\big)} & \text{si } x < 0\,, \\ m & \text{si } x = 0\,, \\ \dfrac{x+1}{x^2+3x+1} & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

- ☐ Si $m = \frac{1}{2}$, alors f est continue en $x = 0$.
- ☐ Si $m = \frac{1}{3}$, f est continue à droite mais pas à gauche en $x = 0$.
- ☐ Si $m = 1$, alors f est continue en $x = 0$.
- ☐ Si $m = \frac{1}{2}$, alors f est continue à gauche mais pas à droite en $x = 0$.

Question 6 : Soit l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$. Alors :

- ☐ $I = \frac{4}{3} - 4\,\mathrm{Log}(\frac{4}{3})$
- ☐ $I = \mathrm{Log}(2) + \frac{1}{2}$
- ☐ $I = 2\,\mathrm{Log}(2) + 1$
- ☐ $I = \frac{5}{3} - 4\,\mathrm{Log}(\frac{3}{2})$

Question 7 : Soit $p \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x|^p \operatorname{Log}(|x|) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

- ☐ Si $p = \frac{3}{2}$, alors f n'est pas dérivable en $x = 0$.
- ☐ Si $p = \frac{1}{2}$, alors f n'est pas continue en $x = 0$.
- ☐ Si $p = \frac{6}{5}$, alors f est dérivable en $x = 0$.
- ☐ Si $p = \frac{2}{3}$, alors f est continue à droite en $x = 0$, mais pas à gauche.

Question 8 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8a_n - 7}$. Alors :

- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ la suite est divergente
- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

Question 9 : Soit $f :]-3, 2[\ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Alors pour tous les $x \in]-3, 2[$ et $y \in]-3, 2[$, tels que $x \neq y$, on a:

- ☐ $-1 \leq \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 9$
- ☐ $-2 \leq \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 8$
- ☐ $-4 \leq \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 6$
- ☐ $-3 \leq \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 7$

Question 10 : Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \dfrac{2^{2n}}{(7n)!}$. Lorsque $n \to \infty$, cette suite

- ☐ converge vers 0
- ☐ converge vers $\dfrac{\operatorname{Log}(2)}{7}$
- ☐ diverge
- ☐ converge vers $\dfrac{4}{7}$

Question 11 : Soit l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$. Alors :

- ☐ $I = \frac{1}{2}\big(\operatorname{Arctg}(3) - \frac{\pi}{4}\big)$
- ☐ $I = 2\big(\operatorname{Arctg}\big(\sqrt{3}\big) - \frac{\pi}{4}\big)$
- ☐ $I = 2\big(\sqrt{3} - 1\big) + \operatorname{Log}(2)$
- ☐ $I = \sqrt{3} - 1 + \operatorname{Log}(2)$

Question 12 : Soit S l'ensemble des solutions de l'équation complexe $\bar{z}^2 = z^2$. Alors :

- ☐ $S = \emptyset$
- ☐ $S = \mathbb{R}$
- ☐ $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ ou } \operatorname{Im}(z) = 0\}$
- ☐ $S = \{-1, +1, -\mathrm{i}, +\mathrm{i}\}$

Question 13 : Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4}{2+3x}$. La série de Taylor de f autour de $x = 2$ est:

- [ ] $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\tfrac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in \ ]1, 3[$
- [ ] $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in \ ]-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}[$
- [ ] $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\tfrac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in \ ]-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}[$
- [ ] $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{3}{8}\right)^k (x+2)^k$ pour $x \in \ ]-\frac{14}{3}, \frac{2}{3}[$

Question 14 : L'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_{0^+}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, \mathrm{d}x$

- [ ] converge, et sa valeur est $I = \sqrt{2}$
- [ ] diverge, car $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Log}\big(\sqrt{\sin(\varepsilon)}\,\big) = -\infty$
- [ ] converge, et sa valeur est $I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(\frac{1}{2})$
- [ ] diverge, car $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ n'est pas définie en $x = 0$

Question 15 : Soit $\lambda = -\frac{1}{6}$. Déterminer, parmi les séries ci-dessous, celle qui converge.

- [ ] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$
- [ ] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^n$
- [ ] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^n$
- [ ] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^n}$

Question 16 : Soit s un paramètre réel, et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $b_n = \dfrac{1}{n^s}$ si n est pair, $b_n = \dfrac{1}{n^{2s}}$ si n est impair. Alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si et seulement si

- [ ] $s > \frac{1}{2}$
- [ ] $s > 1$
- [ ] $s > 0$
- [ ] $s > 2$

Question 17 : Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A = \left\{x > 0 \,:\, \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0\right\}$. Alors :

- [ ] $\mathrm{Inf}\, A = \dfrac{2}{\pi}$
- [ ] $\mathrm{Sup}\, A = \dfrac{\pi}{2}$
- [ ] $\mathrm{Sup}\, A = 0$
- [ ] $\mathrm{Inf}\, A = 0$

Question 18 : Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \sqrt[n]{7}$ si n est pair et $x_n = \dfrac{1}{n^7}$ si n est impair. Alors :

- [ ] $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} x_n = 1$
- [ ] $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$ et $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} x_n = 0$
- [ ] $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = 0$
- [ ] $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = 1$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : La fonction $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^{|x|} 1\, dt$ est dérivable en $x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^5 dont le développement limité d'ordre 4 en $x = 0$ est donné par

$$f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x),$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors $f'(0) + 3f^{(2)}(0) + f^{(3)}(0) = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $z \neq 0$ un nombre complexe dont l'argument vaut $\dfrac{\pi}{4}$. Alors l'argument du nombre complexe $\dfrac{1}{z^2}$ vaut $-\dfrac{\pi}{2}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : La série entière $\displaystyle\sum_{k=100}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : La série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 2$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = x_{n-1} - \dfrac{1}{n}$. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que l'équation $f'(x) = 0$ possède exactement une solution. Alors l'équation $f(x) = 1$ possède au plus deux solutions réelles distinctes.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné, et $B = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ est un majorant de } A\}$. Alors $\operatorname{Inf} B \in B$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Alors f est strictement monotone.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f\colon [-2, 20] \to [0, 1]$ une fonction continue. Alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

☐ VRAI ☐ FAUX