Anna Lachowska

Analyse I – Exercices à rendre

Exercice 3.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.

i) Montrez, en utilisant un ou des résultats du cours, que l'équation $f''(x) = 0$ a au moins deux solutions sur $]0,1[$.

ii) Donnez un exemple explicite d'une fonction f satisfaisant les propriétés ci-dessus où l'équation $f''(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0,1[$.

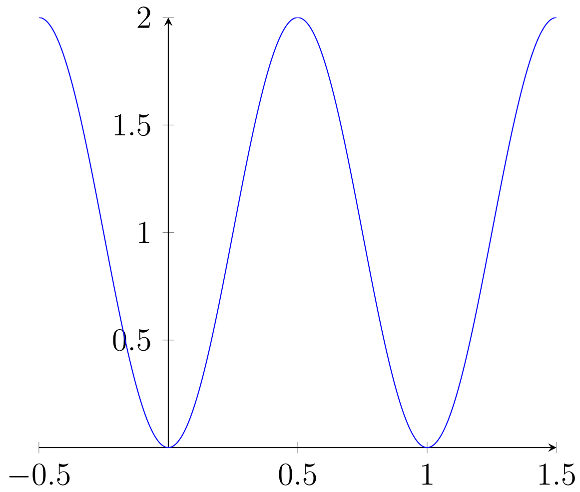
Solution 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.

i) Montrons que l'équation $f''(x) = 0$ a au moins deux solutions sur $]0,1[$. Rappelons d'abord le théorème de Rolle:
Theorème: Soient $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ et puisque $f(0) = f(1) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle pour montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = 0$. On applique à nouveau le théorème de Rolle à la fonction f' (qui est aussi $\mathcal{C}^\infty$) sur les deux tronçons $[0,c]$ et $[c,1]$. Puisque $f'(0) = f'(c) = 0$, il existe $a \in]0,c[$ tel que $f''(a) = 0$. De même, comme $f'(c) = f'(1) = 0$, il existe $b \in]c,1[$ tel que $f''(b) = 0$. Comme $a < c < b$, on a bien trouvé $a \neq b$ sur $]0,1[$ avec $f''(a) = f''(b) = 0$.

ii) Pour donner un exemple explicite d'une fonction f satisfaisant les propriétés ci-dessus et où l'équation $f''(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0,1[$, on cherche une fonction qui a deux minimums locaux (respectivement maximum locaux) en 0 et 1 et un maximum local (respectivement minimum local) entre les deux.

Par exemple, la fonction $f(x) = \sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) + 1$ satisfait ces conditions.



La deuxième dérivée de $\sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) + 1$ est $4\cos(2\pi x)$, qui vaut 0 lorsque $x = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}, n \in \mathbb{Z}$. Sur $[0,1]$, on a exactement deux zéros, $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

Exercice 4.
Soit la fonction $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(2\pi x) + x$. Soient $p_i(x)$, $i = 0,..,3$ les polynômes de Taylor d'ordre 1 de f, en $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ et $x_3 = \frac{3}{2}$, respectivement et $P(x)$ la fonction définie par morceaux :

$$P(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ p_1(x) & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\\ p_2(x) & x \in \left[1, \frac{3}{2}\right[\\ p_3(x) & x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases}$$

1) Donner les polynômes $p_i(x)$, $i = 0,..,3$.

2) La fonction P est-elle continue sur $[0,2]$? Si non, trouver les points de discontinuité de P.

3) Démontrer que $\left|f(x) - P(x)\right| \leq \dfrac{\pi^2}{2}$ pout tout $x \in [0,2]$.

Solution 4.
Soit la fonction $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(2\pi x) + x$. Soient $p_i(x)$, $i = 0,..,3$ les polynômes de Taylor d'ordre 1 de f, en $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ et $x_3 = \frac{3}{2}$, respectivement et $P(x)$ la fonction définie par morceaux :

$$P(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ p_1(x) & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\\ p_2(x) & x \in \left[1, \frac{3}{2}\right[\\ p_3(x) & x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases}$$

Rappel: Pour $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_i \in D$, le polynôme de Taylor d'ordre n en x_i est

$$f_n(x) = \sum_{n=0}^{n} f^{(n)}(x_i)(x - x_i)^n.$$

i) On donne explicitement les polynômes $p_i(x)$, $i = 0,..,3$. Le polynôme de Taylor $p_i(x)$ d'ordre 1 de $f(x) = \sin(2\pi x) + x$ en x_i est

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \sum_{n=0}^{1} f'(x_i)(x - x_i)^1 \\ &= f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) \\ &= \sin(2\pi x_i) + x_i + (2\pi\cos(2\pi x_i) + 1)(x - x_i). \end{aligned}$$

(a) En $x_0 = 0$:

$$p_0(x) = \sin(0) + 0 + (2\pi\cos(0) + 1)(x - 0) = (2\pi + 1)x$$

(b) En $x_1 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \sin(\pi) + \frac{1}{2} + (2\pi\cos(\pi) + 1)(x - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

(c) En $x_2 = 1$:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sin(2\pi) + 1 + (2\pi\cos(2\pi) + 1)(x-1) \\ &= 1 + (1+2\pi)(x-1) \end{aligned}$$

(d) En $x_3 = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \sin(3\pi) + \frac{3}{2} + (2\pi\cos(3\pi) + 1)(x - \frac{3}{2}) \\ &= \frac{3}{2} + (1-2\pi)(x - \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

ii) On remplace les polynômes du point 1 dans la définition de P:

$$P(x) = \begin{cases} (2\pi+1)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} + (1-2\pi)(x-\frac{1}{2}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 1 + (1+2\pi)(x-1) & \text{si } x \in [1, \frac{3}{2}[\\ \frac{3}{2} + (1-2\pi)(x-\frac{3}{2}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

La fonction P est continue par morceaux (puisque chaque morceau est un polynôme). Il faut donc vérifier la continuité aux points x_i pour $i = 1, 2, 3$.

(a) En $x_1 = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} P(x) = \frac{2\pi+1}{2} \neq \frac{1}{2} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} P(x)$$

Donc P est discontinue en $x_1 = \frac{1}{2}$.

(b) En $x_2 = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} P(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-2\pi}{2} \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} P(x)$$

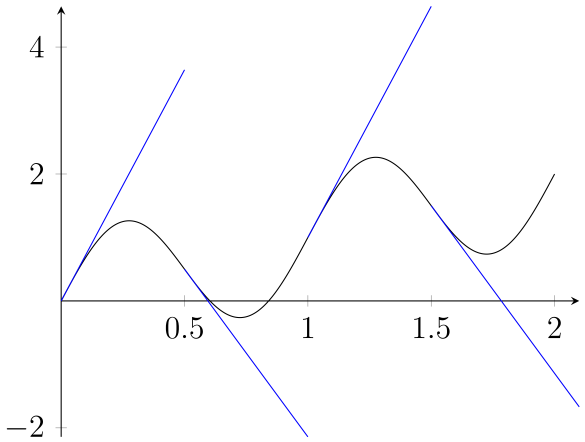
Donc P est discontinue en $x_2 = 1$.

(c) En $x_3 = \frac{3}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} P(x) = 1 + \frac{2\pi+1}{2} \neq \frac{3}{2} = \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} P(x)$$

Donc P est discontinue en $x_3 = \frac{3}{2}$.

Le graphique ci-dessous représente P en bleu, et f en noir. On peut voir les 3 points de discontinuité en x_1, x_2, x_3.



iii) Démontrons que $\big|f(x) - P(x)\big| \leq \dfrac{\pi^2}{2}$ pout tout $x \in [0,2]$. Par un résultat du cours, on sait que

$$\begin{aligned}|f(x) - p_i(x)| &\leq \max_{y\in[x_i,x]} |\frac{f''(y)}{2}(x-x_i)^2| \\ &= \max_{y\in[x_i,x]} |-2\pi^2\sin(2\pi y)(x-x_i)^2| \\ &\leq 2\pi^2(x-x_i)^2\end{aligned}$$

car $|-2\pi^2\sin(2\pi y)|$ est borné par $2\pi^2$.

De plus, sur chaque morceau de P, on a $|x - x_i| \leq \frac{1}{2}$. On obtient donc bien

$$|f(x) - P(x)| \leq 2\pi^2\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{\pi^2}{2}.$$