

Analyse I – Corrigé de la Série 9

Exercice 1.

i) En observant que le dénominateur divise le numérateur, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 2).$$

Pour calculer cette limite, on utilise les propriétés algébriques :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2x + 2 = \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 2 = 5.$$

ii) On utilise la formule $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ avec $a = \sqrt[3]{x+1}$ et $b = \sqrt[3]{x}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left((x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right) \left((x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \right)}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} = 0. \end{aligned}$$

iii) En utilisant que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, on peut récrire le numérateur comme $\cos^2(x) - \sin^2(x) - 1 = -2\sin^2(x)$ et la limite devient

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2(x)}{\sin(x^2)} &= -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin(x^2)} \right) \\ &= -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = -2 \cdot 1^2 \cdot 1 = -2 \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (cf. cours).

iv) Comme $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$, on peut simplifier la fraction en mettant au même dénominateur pour calculer la limite :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = -\frac{3}{3} = -1, . \end{aligned}$$

où on utilise de nouveau les propriétés algébriques pour calculer la dernière limite.

v) Avec une formule de trigonométrie on peut récrire le numérateur

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a} \\ &= - \left(\lim_{x \rightarrow a} \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \right) = -\sin(a)\end{aligned}$$

car la deuxième limite vaut 1.

vi) On utilise la limite connue $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \cdot a - \frac{e^{bx} - 1}{bx} \cdot b \right) = a - b.$$

Si $a \neq 0$ et $b = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} \cdot a = a$. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{bx}}{bx} \cdot b = -b$. Si $a = b = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1}{x} = 0$. Ainsi pour tout couple $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = a - b.$$

Exercice 2.

i) En multipliant par le conjugué du numérateur et du dénominateur on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{4-x}}{\sqrt{x} - 1} &= \frac{[(2+x) - (4-x)](\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt{2+x} + \sqrt{4-x})} \\ &= 2 \frac{(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{2+x} + \sqrt{4-x}} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

ii) Posons $y = x - 2$. Alors $x \rightarrow 2$ implique $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} &= \frac{(y+2)^2 - 4}{\sin\left(\frac{\pi y}{2} + \pi\right)} \\ &= -\frac{y^2 + 4y}{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)} \quad \text{car } \sin(a + \pi) = -\sin(a), \forall a\end{aligned}$$

En utilisant la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

on a

$$\lim_{y \rightarrow 0} -\frac{y^2 + 4y}{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)} \frac{2(y+4)}{\pi} = -\frac{8}{\pi}.$$

iii) Tout d'abord, remarquons que

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x) \cos(x) - \sin(2x) \sin(x) \\ &= (1 - 2 \sin^2(x)) \cos(x) - 2 \sin^2(x) \cos(x) = \cos(x) - 4 \sin^2(x) \cos(x) \\ &= \cos(x) (1 - 4 \sin^2(x))\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(3x) - \cos x}{x^2} &= -4 \frac{\cos(x) \sin^2(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -4 \\ \text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= 1\end{aligned}$$

iv) En multipliant par le conjugué du numérateur au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned}x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1 \right) &= x \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right) - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1} \\ &= \frac{2 + 3 + \frac{6}{x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} + 1} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2}\end{aligned}$$

v) On observe que $(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = (e^x - e^{-x})^2$ et on utilise la limite connue $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right)^2 = \frac{4}{3}.$$

vi) En multipliant par $2x^2$ et par le conjugué du dénominateur au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x^2}}{2x^2} \cdot \frac{2x^2(\sqrt{1 + 5x^2} + 1)}{5x^2} = -\frac{4}{5}.$$

Exercice 3.

i) Observons que $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\tan^2(x - \alpha)}{(x - \alpha)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(x)}{x^2}$. Du cours on sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x \cdot \cos(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) = 1$$

car les deux limites existent et valent 1. Il suit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(x)}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} \right)^2 = 1^2 = 1$$

et donc la limite donnée existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Cette limite existe si et seulement si α est une racine double du polynôme au numérateur. Evalué en α , celui-ci devient

$$\alpha^4 - 2\alpha^4 + 4\alpha^2 = \alpha^2(4 - \alpha^2) = \alpha^2(2 + \alpha)(2 - \alpha).$$

Les candidats sont donc les racines de ce polynôme-ci, c.-à-d. $\alpha \in \{0, -2, 2\}$.

Pour $\alpha = 0$, le polynôme est $x^4 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4)$ dont 0 est bien une racine double.

Pour $\alpha = \pm 2$, on a

$$x^4 \mp 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 \mp 4x + 4) = x^2(x \mp 2)^2$$

et donc 2 et -2 sont des racines doubles respectives.

Ainsi la limite existe si et seulement si $\alpha \in \{-2, 0, 2\}$.

iii) On distingue trois cas pour β .

1) Si $\beta = 0$, la limite vaut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha|x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} (|x| \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha) = \alpha$$

car $0 \leq \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, d'où il suit par le théorème des deux gendarmes que $\lim_{x \rightarrow 0} |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. La limite donnée existe donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ si $\beta = 0$.

2) Si $\beta < 0$, $x^2 + \beta \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ prend des valeurs négatives au voisinage de $x = 0$. En effet, pour $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n^2 + \beta \left| \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^2 + \beta \left| \cos(2n\pi) \right| \right) = \beta < 0.$$

Ainsi l'expression n'est pas définie et donc la limite n'existe pas.

3) Si $\beta > 0$, il faut encore distinguer si α est nul ou pas.

Si $\alpha = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$0 \leq \frac{x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|}{\sqrt{x^2 + \beta \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right|}} = \frac{|x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{x^2} \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right|}} \leq |x|$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|}{\sqrt{x^2 + \beta \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right|}} = 0$$

pour tout $\beta > 0$.

Si $\alpha \neq 0$, la limite n'existe pas. En effet, en prenant les suites $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) + \alpha |x_n|}{\sqrt{x_n^2 + \beta \left|\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)\right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^2 \sin(2n\pi) + \frac{\alpha}{2n\pi}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^2 + \beta |\cos(2n\pi)|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{2n\pi}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^2 + \beta}} = 0$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^2 \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) + \alpha |y_n|}{\sqrt{y_n^2 + \beta \left|\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)\right|}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|y_n| \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) + \alpha}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{y_n^2} \left|\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)\right|}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + \alpha}{\sqrt{1 + \beta \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2 \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right|}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} + \alpha \right) = \alpha \end{aligned}$$

car $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La limite n'existe donc pas (car $\alpha \neq 0$).

Pour résumer, la limite existe si et seulement si $\beta = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ ou si $\beta > 0$ et $\alpha = 0$.

Exercice 4.

Les limites à gauche et à droite de f en $x_0 = 3$ sont respectivement

$$\ell_- := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\beta x - 4) = 3\beta - 4$$

$$\ell_+ := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3x - 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x - 1}{x + 1} = \frac{8}{4} = 2$$

Comme $f(x_0) = \alpha$, la fonction f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \ell_- = \alpha$, et continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \ell_+ = \alpha$. Si, en plus, $\ell_- = \ell_+ = \alpha$, alors f est continue en x_0 .

- i) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = -\frac{5}{2}$ et $\ell_+ = 2$, f n'est ni continue à gauche ni continue à droite.
- ii) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, f est continue à gauche mais pas continue à droite.
- iii) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, f n'est pas continue à gauche mais continue à droite.
- iv) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, on a bien $\ell_- = \ell_+$, mais f n'est quand-même ni continue à gauche ni continue à droite parce que les limites ne sont pas égales à $f(x_0)$.
- v) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, f est continue.

Comme illustration, les graphes sont tracés à la Fig. 1.

Exercice 5.

- i) On calcule les limites de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$ des deux côtés en introduisant une nouvelle variable u tel que $x = \frac{1}{u}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + 2^u} = 1 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2^u} = 0 \neq f(0).$$

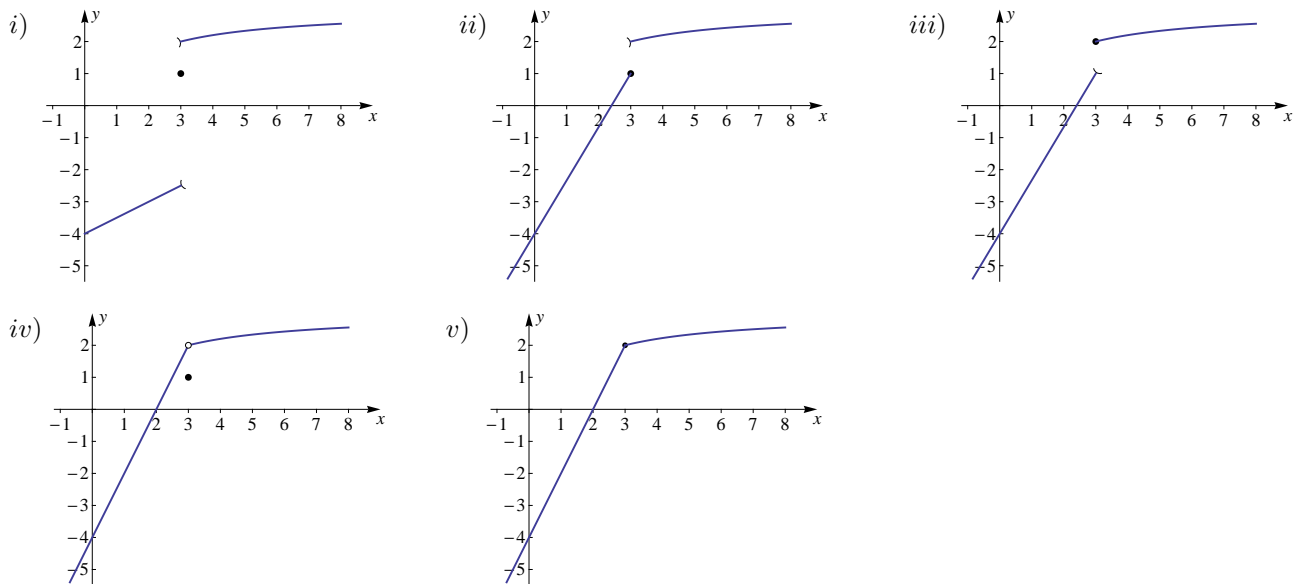


FIGURE 1 – Graphes des fonctions $f(x)$ de l'Ex. 5.

Donc f n'est pas continue mais seulement continue à gauche en $x = 0$ (Fig. 2).

ii) Notons que f est paire parce que les fonctions $\cos(x)$ et x^2 sont paires. Ainsi il suffit de considérer la limite à droite (ou celle à gauche). On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)^2}{x^2(1 + \cos(x))} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \cos(x)} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f(0), \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ($= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$) (cf. cours) et la décomposition en produit de deux limites est valable parce que les deux limites existent. Ainsi f est continue en $x = 0$.

iii) Considérons les suites (x_n) et (y_n) définies respectivement par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Ces suites satisfont $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0.$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas et f n'est pas continue en $x = 0$ (Fig. 3).

iv) Comme la fonction sinus prend des valeurs dans $[-1, 1]$, on a

$$-|x| \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|.$$

Par le théorème des deux gendarmes, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0 = f(0).$$

Ainsi f est continue en $x = 0$ (Fig. 4).

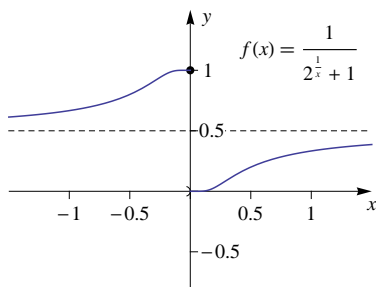


FIGURE 2 – Ex. 6(i)

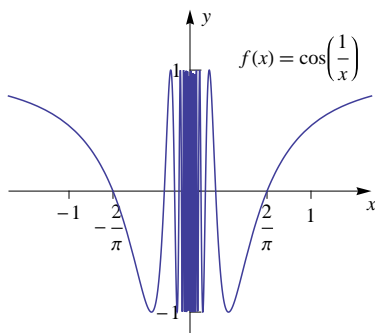


FIGURE 3 – Ex. 6(iii)

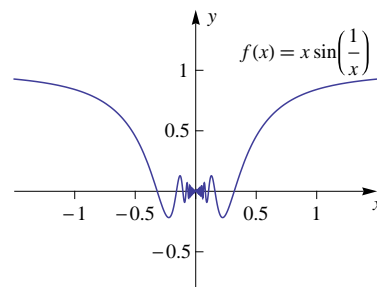


FIGURE 4 – Ex. 6(iv)

Exercice 6.

i) Posons

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{x-1} - x - 1 \end{aligned}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur \mathbb{R} . De plus,

$$f(0) = \frac{1}{e} - 1 < 0 \text{ et } f(3) = e^2 - 4 > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in [0, 3] \text{ tel que } f(\alpha) = 0$$

f a donc bien au moins 1 racine.

ii) Posons

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - \frac{1}{x} - 1 \end{aligned}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus,

$$f(1) = -1 < 0 \text{ et } f(2) = \frac{5}{2} > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in [1, 2] \text{ tel que } f(\alpha) = 0$$

f a donc bien au moins 1 racine.

iii) Posons

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x-2)\cos(x) - \sin(x) \end{aligned}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur \mathbb{R} . De plus,

$$f(0) = -2 < 0, f(-\pi) = 2 + \pi > 0 \text{ et } f(2\pi) = 2(\pi - 1) > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in]-\pi, 0[\text{ tel que } f(\alpha) = 0 \text{ et } \exists \beta \in]0, 2\pi[\text{ tel que } f(\beta) = 0$$

f a donc bien au moins 2 racines.

iv) Posons

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x - x^5 - 1 \end{array}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur \mathbb{R} . De plus,

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(-2) = -\frac{2}{e^2} - 1 + 2^5 > 0 \text{ et } f(1) = e - 2 > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in]-2, 0[\text{ tel que } f(\alpha) = 0 \text{ et } \exists \beta \in]0, 1[\text{ tel que } f(\beta) = 0$$

f a donc bien au moins 2 racines.