Anna Lachowska

Analyse I – Corrigé de la Série 8

Exercice 1.

i) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{2n+1}$. On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$ diverge grossièrement.

ii) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (|u_n|)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le critère de Cauchy, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ est absolument convergente.

iii) La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs. La suite de ses sommes partielles est donc croissante.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n+1)n^{\frac{1}{2}}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^{\frac{1}{6}}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}
\end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ est convergente car toute série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ avec $p > 1$ est convergente (voir Ex. 8, Série 7).

Ainsi, par le critère de comparaison, elle est donc convergente.

iv) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n!}{2^n+1}$.

$$\begin{aligned}
u_n &\geq \frac{n!}{2^{n+1}} \geq \frac{3^{n-2}}{2^{n+1}} \qquad \forall n \geq 3, \\
&\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{2^3} \geq \frac{1}{18}\left(\frac{3}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Cette dernière est une série géométrique avec $r = \dfrac{3}{2} > 1$. Ainsi, par le critère de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$ diverge grossièrement.

On pourrait aussi utiliser le critère de d'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}+1} \cdot \frac{2^n+1}{n!} = (n+1) \cdot \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = (n+1) \cdot \frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} \underset{n\to\infty}{\to} \infty,$$

donc la série diverge.

v) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{3^{n-1}}{(n-1)!}$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \frac{3^n}{n!}\frac{(n-1)!}{3^{n-1}} \\ &= \frac{3}{n} \\ &\underset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

Donc d'après le critère de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!}$ converge absolument.

vi) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(n!)^2}{n^n}$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \frac{((n+1)!)^2}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{(n!)^2} = (n+1)^2\,\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n+1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} +\infty\end{aligned}$$

En effet, nous avons déjà vu en Série 5 que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$ est grossièrement divergente.

vii) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(n!)^3}{(pn)!}$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \frac{((n+1)!)^3}{(p\,(n+1))!}\frac{(pn)!}{(n!)^3} \\ &= \frac{(n+1)^3}{(pn+p)\times(pn+(p-1))\times\cdots\times(pn+1)}\end{aligned}$$

3 cas se présentent :

— $p \in \{1, 2\}$: $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} +\infty$

— $p = 3$: $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \dfrac{1}{3^3}$

— $p > 3$: $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(pn)!}$ converge absolument $\Leftrightarrow$ $p \geq 3$.

Exercice 2.

Dans cet exercice, nous noterons $\mathcal{D}$ le domaine de définition de la fonction f.

i) Ici, le dénominateur de f ne s'annule jamais. Ainsi, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 \cos(-3x)}{1+\sin^2(-x)} = \frac{x^4 \cos(3x)}{1+\sin^2(x)} = f(x)$$

f est donc paire.

f étant par opérations usuelles algébriques, par la croissance de la fonction $x \mapsto x^4$, f n'est pas bornée lorsque x tend vers l'infini. Par contre, elle est bornée sur tout intervalle borné $[a, b] \in \mathbb{R}$ et donc, ne peut être périodique.

ii) f étant définie comme un produit de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, nous avons $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$f(-x) = 2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right) = -f(x)$$

Car la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est paire et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire. f est donc impaire.

La fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est périodique de période 4π, la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ est périodique de période 6π. f est donc périodique de période 12π car 12π est le plus petit réel multiple de 4π et 6π.

iii) On a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ car f est la composition de la somme de fonctions toutes définies sur $\mathbb{R}$.

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4} - (-1)\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} + 0\right)^2 = \frac{1}{16}$$

f n'a donc pas de parité.

On peut aisément vérifier que f est 1-périodique.

iv) f est définie comme produit et somme de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$f(-x) = -x\sin((-x)^2) + (-x)^2\sin(-x) = -x\sin(x^2) - x^2\sin(x) = -f(x)$$

f est donc impaire.

Une fonction périodique et continue est bornée. f étant continue par opérations usuelles, montrons que f n'est pas majorée.

Soit $M > 0$. En posant $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $x \sin(x^2) + x^2 \sin(x) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2\right) \geq \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - 1\right) \geq \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cdot 2k\pi$. Ainsi, en choisissant très grossièrement $k = \lfloor M \rfloor + 1$, on en déduit que f n'est pas majorée lorsque x tend vers l'infini, en même temps elle est bornée sur tout intervalle borné, et par conséquent pas périodique.

v) Afin que f soit définie, il faut d'une part que le terme sous la racine soit positif et d'autre part que le dénominateur soit non nul. Cela correspond à $x \notin]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ et $|x| \neq 2$. Ainsi, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cup \{-2\} \cup \{2\}\}$.

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2 + 1}{1 - \sqrt{(-x)^2 - 3}} = \frac{2x^2 + 1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}} = f(x)$$

f est donc paire.

f n'est pas périodique car elle tend vers $\pm\infty$ quand $x \to \pm 2$, et pas pour d'autres valeurs de x.

Exercice 3.

i) Comme f et g sont croissantes, on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \quad f(x_1) \leq f(x_2) \quad \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} \quad g(f(x_1)) \leq g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire $g \circ f$ est aussi croissante.

ii) Comme f et g sont décroissantes, on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} \quad f(x_1) \geq f(x_2) \quad \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} \quad g(f(x_1)) \leq g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire $g \circ f$ est croissante.

iii) Pour f croissante et g décroissante on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \quad f(x_1) \leq f(x_2) \quad \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} \quad g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)),$$

c'est-à-dire $g \circ f$ est décroissante.
Pour la composée $f \circ g$ on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} \quad g(x_1) \geq g(x_2) \quad \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \quad f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)),$$

c'est-à-dire $f \circ g$ est aussi décroissante. La composée de deux fonctions avec monotonies opposées est donc toujours décroissante.

Exercice 4.

i) Montrons que f est injective et surjective :

— Injectivité :

Soit $x,\, x' \in A^2$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

f est donc injective.

— Surjectivité :

Soit $y \in B$. Si on pose $x = g(y)$, on a bien $f(x) = y$.

f est donc surjective.

f est donc bijective.

On a bien $f^{-1} = g$ car $f(x) = y \ \Leftrightarrow g(y) = x$.

ii) Supposons f impaire et bijective. Par définition d'une fonction réciproque on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$-x = f^{-1} \circ f(-x) = f^{-1}(-f(x))$$

Car f est impaire. Enfin, nous pouvons écrire $-x$ de la façon suivante

$$-x = -f^{-1} \circ f(x)$$

Et donc

$$f^{-1}(-f(x)) = -f^{-1}(f(x))$$

f étant bijective, en posant $y = f(x)$ on a que $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$ ce qui démontre que f^{-1} est impaire.

iii) La fonction $f(x)$ est définie sur $[-3,\, +\infty[$ et bijective sur son domaine : $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$. En posant :

$$\begin{array}{cccccc} g & : & [-2,\, +\infty[& \to & [-3,\, +\infty[\\ & & x & \mapsto & (x+2)^2 - 3 \end{array}$$

Nous avons bien que $\forall x \in [-2,\, +\infty[$, $f \circ g(x) = x$ et $\forall x \in [-3,\, +\infty[$, $g \circ f(x) = x$. Ainsi, $f^{-1} = g$.

iv) Le plus grand domaine dans lequel $x^2+1 \in [0,\, \pi]$ sans que $\cos{(x^2+1)}$ ne prenne plusieurs fois la même valeur est $[0,\, \sqrt{\pi - 1}]$ (on peut aussi choisir $[-\sqrt{\pi-1}, 0]$).

Ainsi, en posant

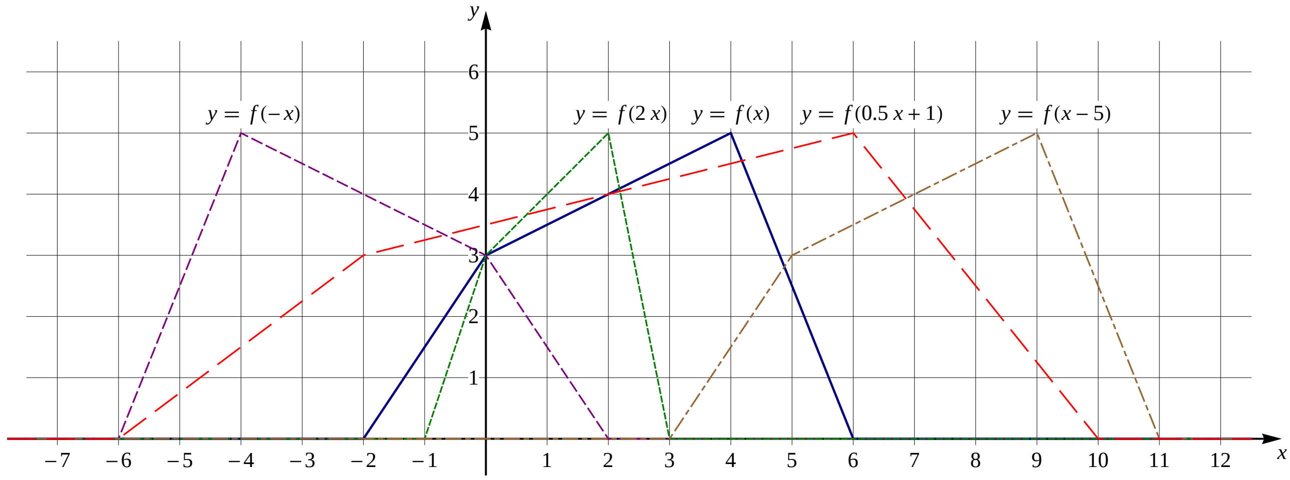
$$\begin{array}{ccccc} f & : & [0,\, \sqrt{\pi - 1}] & \to & [-1,\, \cos(1)] \\ & & x & \mapsto & \cos(x^2+1) \end{array}$$

Nous pouvons facilement expliciter sa fonction réciproque

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1} & : & [-1,\, \cos(1)] & \to & [0,\, \sqrt{\pi - 1}] \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\arccos(x) - 1} \end{array}$$

(Si on choisit le domaine $[-\sqrt{\pi-1}, 0]$ pour $f(x)$, la fonction réciproque serait $f^{-1}(x) = -\sqrt{\arccos(x) - 1}$.)

Exercice 5.



Exercice 6. Pour calculer $f \circ g$, il faut déterminer les valeurs de x pour lesquelles $g(x) \geq 0$ et $g(x) < 0$ respectivement et puis appliquer l'expression correspondante de f au résultat $g(x)$. On a $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x + 2 \geq 0$ pour $x \geq -2$. Ainsi $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ et donc

$$(f \circ g)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2g(x) - 3, & x \geq -2 \\ g(x), & x < -2 \end{array} \right\} = \begin{cases} 2x^2 - 3, & x \geq 1 \\ 2x + 1, & -2 \leq x < 1 \\ x + 2, & x < -2 \end{cases}$$

Le procédé pour $g \circ f$ est similaire. Comme $2x - 3 \geq 1$ pour $x \geq 2$ et $f(x) < 0$ pour tout $x < 0$, on a $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$. Ainsi

$$(g \circ f)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x)^2, & x \geq 2 \\ f(x) + 2, & x < 2 \end{array} \right\} = \begin{cases} (2x - 3)^2, & x \geq 2 \\ 2x - 1, & 0 \leq x < 2 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}$$

Exercice 7.

Q1 : VRAI

La stricte monotonie de la fonction implique directement que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \, (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)) \,.$$

Q2 : FAUX

Contre-exemple : Posons

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Puis $f(x) = g(x)$ si $x \neq 0$, 0 sinon. f est injective mais pas monotone.

Q3 : FAUX

Les fonctions $f(x) = x$ et $f^{-1}(x) = x$ sont toutes deux croissantes.

Q4 : VRAI

Soit f une fonction bijective de réciproque décroissante et $(x, x') \in \mathbb{R}^2$.

Posons $y = f^{-1}(x)$ et $y' = f^{-1}(x')$.

La fonction $x \mapsto f^{-1}(x)$ étant décroissante on a

$$x \geq x' \Leftrightarrow f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x')$$

Puis en remarquant que $x = f(y)$ et $x' = f(y')$

$$f(y) \geq f(y') \Leftrightarrow y \leq y'$$

Q5 : FAUX

Contre-exemple : $f(x) = -2x$ et $g(x) = x$.

Q6 : FAUX

Contre-exemple : $f(x) = -x$ et $g(x) = x^2$.

Exercice 8.

Q1 : (a) Tout d'abord, posons

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{2x^2+1} \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il nous faut trouver un $\delta > 0$ tel que pour tout x tel que pour tout $|x| \leq \delta$, on ait $|f(x) - 1| \leq \varepsilon$.

On sait que

$$\left|\frac{1}{2x^2+1} - 1\right| = \left|\frac{-2x^2}{2x^2+1}\right| \leq 2x^2.$$

Donc en prenant $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon}$, on aura

$$|x| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - 1| \leq 2\delta^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2+1} = 1$$

(b) Soit (a_n) une suite de nombres réels convergente vers 0. On va démontrer que la suite $\dfrac{1}{2(a_n)^2+1}$ converge vers 1. D'après le théorème sur les opérations algébriques sur les limites on a :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (a_n)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (2(a_n)^2 + 1) = 1.$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(a_n)^2+1} = 1.$$

Q2 : (a) Posons

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

Deux cas se présentent :

(1) Soit $a = 0$. On va démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il nous faut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout x tel que $|x| \leq \delta$, on ait $|x^3| \leq \varepsilon$. Il est facile à voir que l'on peut prendre $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

(2) Soit $a \neq 0$. On va démontrer que $\lim\limits_{x\to a} x^3 = a^3$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il nous faut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout x tel que $|x - a| \leq \delta$, on ait $|x^3 - a^3| \leq \varepsilon$.

On sait que

$$|x^3 - a^3| = |x - a|\,|x^2 + ax + a^2| \leq |x - a|\left(|x^2| + |ax| + |a^2|\right).$$

Si on prend $|x - a| \leq |a|$, alors $|x| \leq 2|a|$. On a donc

$$|x^3 - a^3| \leq |x - a|(4a^2 + 2a^2 + a^2) = 7a^2 \cdot |x - a|.$$

En posant $\delta = \min\{|a|, \varepsilon/7a^2\}$, on obtient finalement

$$|x^3 - a^3| \leq 7a^2\delta \leq \varepsilon.$$

Et donc

$$\lim_{x\to a} x^3 = a^3$$

(b) Soit (a_n) une suite de nombres réels convergente vers $a \in \mathbb{R}$. On va considérer la suite $(b_n = a_n - a)$. Alors on a $(a_n = a + b_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. On va démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^3 = a^3$. D'après le théorème sur les opérations algébriques sur les limites on a :

$$\lim_{n\to\infty} (a + b_n)^3 = \lim_{n\to\infty} (a^3 + 3a^2 b_n + 3a(b_n)^2 + (b_n)^3) = a^3,$$

puisque $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^3 = 0$.

Q3 : (a) Posons

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il nous faut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout x tel que $|x - a| \leq \delta$, on ait $|f(x) - \sqrt{a}| \leq \varepsilon$. On a

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|\frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \text{ car } \sqrt{x} \geq 0$$

Alors si on prend $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{a}$, on obtient

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Ce qui démontre que

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

(b) Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs convergente vers $a > 0$. On va considérer la suite $(b_n = a_n - a)$. Alors on a $(a_n = a + b_n)$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. On va démontrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{a + b_n} = \sqrt{a}\sqrt{1 + \frac{b_n}{a}}.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$, $|b_n| \leq a$, et donc $0 \leq \left|\frac{b_n}{a}\right| \leq 1$. Alors pour $n \geq m$ on peut écrire

$$\sqrt{1 - \left|\frac{b_n}{a}\right|} \leq \sqrt{1 + \frac{b_n}{a}} \leq \sqrt{1 + \left|\frac{b_n}{a}\right|}.$$

Par l'Intermezzo dans la Série 5 on sait que $1 \leq \sqrt{1 + x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$ pour tout $x \geq 0$ et $1 + y \leq \sqrt{1 + y} \leq 1 + \frac{1}{2}y$ pour tout $-1 \leq y \leq 0$. Alors on a pour tout $n \geq m$

$$1 - \left|\frac{b_n}{a}\right| \leq \sqrt{1 + \frac{b_n}{a}} \leq 1 + \frac{1}{2}\left|\frac{b_n}{a}\right|.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} |b_n| = 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \left|\frac{b_n}{a}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2}\left|\frac{b_n}{a}\right|\right) = 1$$

et d'après le théorème de deux gendarmes, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{b_n}{a}} = 1$ et

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a}\sqrt{1 + \frac{b_n}{a}} = \sqrt{a}.$$