Analyse I – Corrigé de la Série 7

Exercice 1.

(a) : *i)* Pour la série géométrique, le critère de d'Alembert s'écrit (pour $q \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{q^{n+1}}{q^n}\right| = |q|.$$

Donc par le critère, la série géométrique converge (absolument) si $|q| < 1$ (la convergence (absolue) pour $q = 0$ est triviale) et diverge si $|q| > 1$. Si $|q| = 1$, la série diverge aussi, car $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

ii) Le critère de Cauchy appliqué à la série géométrique s'écrit

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|q^n|} = |q|.$$

Donc par le critère, la série converge (absolument) pour $|q| < 1$ et diverge pour $|q| > 1$. Si $|q| = 1$, la série diverge aussi, car $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

(b) : *i)* On a que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\frac{2^n}{2+(-1)^n}\right| = \left|\frac{2+(-1)^{n+1}}{2\left(2+(-1)^n\right)}\right|$$

Cette suite ne converge pas. Ainsi, on ne peut pas appliquer le critère de d'Alembert ici.

ii) On a que

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{2+(-1)^n}{2^n}\right|} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2+(-1)^n}$$

Or l'on a toujours

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{2+(-1)^n} \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{3}$$

Les deux termes extérieurs tendant tous deux vers $\frac{1}{2}$, on a d'après le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$$

Ainsi, d'après le critère de Cauchy, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ converge absolument.

Remarque : On aurait pu remarquer que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et donc que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ converge comme somme de deux séries géométriques convergentes.

Exercice 2.

i) Par le critère de Cauchy, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3n+2}{4n+5}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1.$$

Remarque. Puisque la série converge, on peut en déduire la limite de la suite :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n = 0\,,$$

ce qui est une condition nécessaire pour la convergence de la série. De cette manière on réussit parfois à démontrer la convergence vers zéro des suites dont la limite n'est pas autrement évidente.

ii) Par le critère de d'Alembert, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^4}{3n^4}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{3n^4} = \frac{1}{3} < 1.$$

iii) Cette série converge par le critère de Leibniz. En effet, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3n-2}$ satisfait les trois conditions de ce critère :

— le signe de a_n change avec la parité de n,

— la suite des valeurs absolues $|a_n| = \dfrac{1}{3n-2}$ est décroissante,

— $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Notons encore que la série absolue $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ne converge pas parce que $\dfrac{1}{3n-2} \geq \dfrac{1}{3n}$ et la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

iv) On a

$$\sqrt{n^2+7} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+7}-n\right)\left(\sqrt{n^2+7}+n\right)}{\sqrt{n^2+7}+n} = \frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n}\,.$$

Observons que pour $n > 3$, on a $n^2+7 < (n+1)^2$ et donc

$$\frac{7}{\sqrt{n^2+7}+n} > \frac{7}{\sqrt{(n+1)^2}+n} > \frac{7}{3n}\,.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{3n} = \frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, la série initiale diverge aussi par le critère de comparaison.

v) On a

$$\left|1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right| \overset{(1)}{=} 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \overset{(2)}{\leq} 2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2(n+1)^2} < \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{n^2},$$

où on a utilisé la trigonométrie en $^{(1)}$ et l'inégalité $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$ en $^{(2)}$.

Comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ converge (absolument) par le critère de comparaison.

vi) Cette série diverge car $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2} = \dfrac{1}{7} \neq 0$ (critère nécessaire).

vii) On a pour tout $n \geq 1$

$$0 < \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n} = \frac{4}{n(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})} < \frac{2}{n^{3/2}} \ .$$

Par le critère de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{n}$ converge (absolument) car $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Ceci se démontre comme pour le cas de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: la suite des sommes partielles $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}}$ est croissante et bornée car

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \left(\frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}}\right) + \left(\frac{1}{4^{3/2}} + \frac{1}{5^{3/2}}\right) + \dots \\ &\leq 1 + 2\left(\frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{4^{3/2}} + \dots\right) \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^{3/2}}\left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_n \end{aligned}$$

et donc $s_n \leq \dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Remarque. Exercice 8 montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge pour tout $p > 1$.

Exercice 3.

i) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.
Ainsi, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_n = 1$$

ii) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+3)} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+3}\right)$

Soit $\mathcal{S}_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}\right)$. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

iii) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{2i-1}{i^2(i-1)^2} = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{(i-1)^2} - \frac{1}{i^2} \right) = 1 - \frac{1}{n^2}$.

Ainsi :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_n = 1$$

Exercice 4.

i) La série géométrique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c} \right)^n$ converge (absolument) $\Leftrightarrow$ $\left| \dfrac{c}{1-c} \right| < 1$ $\Leftrightarrow$ $c = 0$ ou bien

$$\left| \frac{c-1}{c} \right| > 1 \;\Leftrightarrow\; 1 - \frac{1}{c} > 1 \text{ ou } 1 - \frac{1}{c} < -1 \;\Leftrightarrow\; c < 0 \text{ ou } 0 < c < \frac{1}{2}$$

Alors on a : $c < \dfrac{1}{2}$.
Remarque : On pourrait aussi utiliser le critère de Cauchy et puis traiter le cas où le critère de Cauchy ne permet pas de conclure (limite = 1) séparément. En effet, quand $\left| \dfrac{c}{1-c} \right| = 1 \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{2}$, on a la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ qui diverge.

ii) Pour $c = 0$ la convergence vers 0 est évidente et on peut supposer que $c \neq 0$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} |c| \right) = |c|,$$

ce qui nous permet de conclure, grâce au critère de d'Alembert, que la série converge (absolument) si $|c| < 1$ et qu'elle diverge si $|c| > 1$. Si $c = \pm 1$, la série diverge.

iii) Pour $c = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a $\left| \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2} \right) \right)^n \right| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc la série diverge.
Pour $c \neq 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a par le critère de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left| \sin\left(\frac{\pi c}{2} \right) \right| < 1,$$

et donc la série converge (absolument) et sa somme vaut (série géométrique commençant à $n = 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2} \right) \right)^n = \frac{\sin\left(\frac{\pi c}{2} \right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi c}{2} \right)} .$$

iv) Pour $c = 0$, la série converge et est égale à zéro. Soit donc $c \neq 0$. En utilisant le critère de d'Alembert, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{c^n n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| c \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|c|}{e} .$$

Ainsi la série converge (absolument) si $|c| < e$ et elle diverge si $|c| > e$ (et on obtient aucune information si $|c| = e$).

Si $c = \pm e$, la suite des valeurs absolues $(|a_n|)$ est croissante :

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > |a_n|$$

car la suite $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ croît vers e. Comme $|a_1| = |c| = e$, il suit que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Le critère nécessaire pour la convergence d'une série n'est donc pas satisfait et la série diverge.

Exercice 5.

i) On calcule

$$\begin{aligned} cS_n - S_n &= c(1+2c+3c^2+\cdots+nc^{n-1}) - (1+2c+3c^2+\cdots+nc^{n-1}) \\ &= -(1+c+c^2+\cdots+c^{n-1}) + nc^n = -\frac{1-c^n}{1-c} + nc^n. \end{aligned}$$

ii) En utilisant le résultat de *i)* on a d'une part pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} kc^{k-1} = S_n = \frac{1}{c-1}\left(-\frac{1-c^n}{1-c} + nc^n\right) = \frac{1-c^n}{(1-c)^2} + \frac{nc^n}{c-1}\ . \tag{1}$$

Dans l'Ex. 4 *ii)* on a montré que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc^n$ converge pour $|c| < 1$, donc en particulier pour $0 < c < 1$. Ainsi par le critère nécessaire de la convergence d'une série, $\lim\limits_{n\to\infty} nc^n = 0$. En laissant $n \to \infty$ dans (1), on obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-c^n}{(1-c)^2} + \frac{nc^n}{c-1}\right) = \frac{1}{(1-c)^2}.$$

Exercice 6.

On distingue pour chacun des deux critères les cas de convergence et de divergence.

Critère de Cauchy - cas convergent.

Le but est de trouver une suite (b_n) de la forme $b_n = Cq^n$ avec $|q| < 1$ et $C > 0$ telle que il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| \leq b_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho < 1$. On choisit q tel que $\rho < q < 1$ (par exemple $q = \frac{1+\rho}{2}$, mais la valeur précise n'a pas d'importance ici). Puisque la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, on peut trouver un entier naturel $n_0 \geq 1$ tel que $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ pour tout $n \geq n_0$ (en effet, écrire la définition de la limite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ pour $\varepsilon = q - \rho > 0$). Par conséquent on a

$$0 \leq |a_n| \leq q^n \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

ce qui implique la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, car $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.

Critère de Cauchy - cas divergent.
Dans ce cas on veut trouver (b_n) avec $|q| > 1$ telle que $|a_n| \geq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho > 1$. On choisit q tel que $\rho > q > 1$. Il existe un entier naturel n_0 tel que $\sqrt[n]{|a_n|} > q$ pour tout $n \geq n_0$ (écrire la définition de la limite pour $\varepsilon = \rho - q > 0$). Par conséquent on a

$$|a_n| \geq q^n \geq 1 \quad \text{pour tout } n \geq n_0. \tag{2}$$

et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge parce que $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty$.
Remarque : Pour montrer la divergence de la série sans passer par le critère de comparaison, il suffit de constater à partir de (2) que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Ainsi la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge parce que le critère nécessaire pour la convergence n'est pas satisfait.

Critère de d'Alembert - cas convergent.
La stratégie est la même que pour le cas convergent du critère de Cauchy.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho < 1$, choisir q tel que $\rho < q < 1$. Il existe un entier naturel n_0 tel que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ pour tout $n \geq n_0$ (poser $\varepsilon = q - \rho$). Par conséquent on a pour tout $n \geq n_0$

$$|a_n| \leq |a_{n-1}|\, q \leq |a_{n-2}|\, q^2 \leq \cdots \leq |a_{n_0}|\, q^{n-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}\, q^n = Cq^n,$$

où on pose $C = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_o}}$. Ainsi

$$0 \leq |a_n| \leq b_n := Cq^n \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Ceci implique la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.
Critère de d'Alembert - cas divergent.
Même stratégie que pour le critère de Cauchy.
Soit $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho > 1$. On choisit q tel que $\rho > q > 1$. Il existe un entier naturel n_0 tel que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q$ pour tout $n \geq n_0$ (poser $\varepsilon = \rho - q > 0$). Par conséquent on a pour tout $n \geq n_0$

$$|a_n| \geq |a_{n-1}|\, q \geq |a_{n-2}|\, q^2 \geq \cdots \geq |a_{n_0}|\, q^{n-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}\, q^n.$$

où on pose $C = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}}$. Ainsi

$$|a_n| \geq Cq^n \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge comme pour le critère de Cauchy.

Exercice 7.

i) Posons $a_n = q^n n^b$. Si $q = 0$, la série converge vers 0. Sinon, on peut caluler :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{q^{n+1}(n+1)^b}{q^n n^b}\right| = \lim_{n\to\infty} |q| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b = |q|.$$

Puisque $|q| \neq 1$, alors d'après le critère de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n n^b$ converge $\Leftrightarrow$ $|q| < 1$ sinon elle diverge grossièrement.

ii) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^{\frac{8}{7}}}$. Nous allons utiliser la même technique que pour la question *vii)* de l'exercice 2. La suite des $(\mathcal{S}_n)$ est croissante, nous voulons démontrer qu'elle est bornée.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n &= 2\left(1 + \left(\frac{1}{2^{\frac{8}{7}}} + \frac{1}{3^{\frac{8}{7}}}\right) + \left(\frac{1}{4^{\frac{8}{7}}} + \frac{1}{5^{\frac{8}{7}}}\right) + \dots\right) \\
&\leq 2\left(1 + 2\left(\frac{1}{2^{\frac{8}{7}}} + \frac{1}{4^{\frac{8}{7}}} + \dots\right)\right) \\
&= 2\left(1 + \frac{2}{2^{\frac{8}{7}}}\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{8}{7}}} + \dots\right)\right) \\
&= 2\left(1 + \frac{\mathcal{S}_n}{2^{\frac{8}{7}}}\right)
\end{aligned}$$

Et ainsi

$$\mathcal{S}_n \leq \frac{2}{1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{7}}}}$$

Ce qui prouve que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{8}{7}}}$ converge.

Remarque. Exercice 8 montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge pour tout $p > 1$.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} + n^{\frac{3}{5}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$.

À partir de cette expression du majorant, on peut aisément appliquer la même méthode que pour la question précédente car $\frac{5}{3} > 1$ et ainsi conclure que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} + n^{\frac{3}{5}}}$ converge.

iv)
— Si $a \geq 1$, le terme général ne tend pas vers 0 et la série $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^p}$ diverge grossièrement.

— Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $a < 1$, alors par le critère de Cauchy on a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{n^p}} = \lim_{n\to\infty} a^{n^{p-1}}$. Cette limite vaut 0 si $p \geq 2$ et a si $p = 1$. Dans tous les deux cas, la série converge absolument.

v) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{P(n)}{n!}$. Nous avons que $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{P(n+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{P(n)}\right| = \left|\frac{P(n+1)}{(n+1)P(n)}\right|$.

Or, $deg(P(n+1)) < deg((n+1)P(n))$ donc $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ et donc d'après le critère de d'Alembert, $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}$ converge absolument. Cela implique que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}$ converge.

Exercice 8.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, nous obtenons en regroupant les termes en paquets de 2^k termes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

Toujours en utilisant l'argument de la décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en regroupant les termes par paquets de 2^k :

$$2\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3 + a_3 + a_4) + \cdots \geq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

Nous obtenons donc les inégalités suivantes pour les séries à termes positifs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ce qui est un argument suffisant pour conclure que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ ont la même nature.

Ainsi, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ a la même nature que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$. On reconnaît ici une série géométrique qui converge $\Leftrightarrow \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \Leftrightarrow p > 1$.

$\square$