Anna Lachowska

Analyse I – Corrigé de la Série 5

Exercice 1.

Q1 : FAUX : $a_n = (-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.

Q2 : VRAI : $\forall n \in \mathbb{N}\, |a_n \sin(n)| \leq |a_n|$. Or $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ et a fortiori $\lim_{n\to\infty} |a_n \sin(n)| = 0$ puis $\lim_{n\to\infty} a_n \sin(n) = 0$.

Q3 : FAUX : Prendre $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q4 : VRAI : Une suite convergente est bornée (voir les Notes du cours 7).
Par définition de la convergence d'une suite vers une limite l, $\forall \eta > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0\, |a_n - l| \leq \eta$. En prenant $\varepsilon = \max(|l| + \eta, \max_{i\in[\![0,\,n_0]\!]}\{|a_i|\})$. On a bien le résultat attendu.

Q5 : VRAI : Prendre $\delta = \varepsilon + |a|$ où ε correspond à celui de la question précédente.

Q6 : FAUX : Prendre $a_n = n$ et $b_n = -\frac{n}{3}$.

Q7 : FAUX : Même contre-exemple que précédemment.

Q8 : FAUX : Prendre $a_n = (n+1)^2$ et $b_n = \frac{1}{n+1}$.

Q9 : VRAI : On a $b_n = \dfrac{a_n b_n}{a_n}$, où les deux suites $(a_n b_n)$ et (a_n) sont convergentes et $\lim_{n\to\infty} a_n = l \neq 0$. Alors la suite (b_n) converge.

Q10 : VRAI : Si (a_n) converge, alors la suite $(|a_n|)$ converge aussi. Puis on utilise la linéarité de la limite.

Q11 : FAUX : Prendre $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ et $b_n = \frac{1}{n+1}$.

Q12 : VRAI : Raisonnons par contraposée. Supposons que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul et sachant que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors par opérations usuelles sur les limites, $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ converge.

Q13 : FAUX : Prendre $a_n = b_n = n$.

Exercice 2.

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - 3\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{7}{n^2}} = \frac{5 - 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3 + 7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{5}{3}$$

ii) On a
$$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} n^{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} = 0\ ,$$
et donc
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 0\ .$$

iii) On a

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} \leq 1+\frac{1}{n^2} \qquad \overset{\text{[Th2G]}}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = 1 \ ,$$

où [Th2G] dénote « par le théorème des deux gendarmes ». Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \ .$$

Exercice 3.

Pour $0 < x < 1 < \frac{\pi}{2}$ on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x) \qquad &\Rightarrow \qquad 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \\ \Rightarrow \qquad \cos(x)^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1 \qquad &\Rightarrow \qquad 1-\sin(x)^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1 \\ \Rightarrow \qquad 1-x^2 \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \leq 1 \qquad &\Rightarrow \qquad \sqrt{1-x^2} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \ . \end{aligned}$$

i) On a pour $n \geq 2$:

$$0 \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \qquad \overset{\text{[Th2G]}}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \ .$$

ii) On a d'abord pour $n \geq 1$

$$1-\left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2} \leq 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \qquad \overset{\text{[Th2G]}}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1 \ ,$$

et ensuite

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2} \leq \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} \leq 1 \qquad \overset{\text{[Th2G]}}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 \ .$$

iii) *Méthode 1 :* Pour tout $n \geq 2$ on a $0 < \frac{2n+3}{n^3} < 1$ et donc

$$0 < n\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right) < n \cdot \frac{2n+3}{n^3} = \frac{2n+3}{n^2}.$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2} = 0,$$

on trouve par le théorème des deux gendarmes

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)\right) = 0.$$

Méthode 2, fastidieuse mais applicable dans le cas plus général :

$$\lim_{n\to\infty} p(n) \sin\left(q(n)\right) ,$$

où $p(n), q(n)$ sont des fonctions rationnelles de $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} q(n) = 0$.

On a pour $n \geq 2$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2n+3}{n^3}\right)^2} \leq \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}} \leq 1 \ .$$

Comme pour *ii*) on montre que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{2n+3}{n^3}\right)^2} = 1 \ ,$$

d'où on trouve par le théorème des deux gendarmes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}} = 1 \ .$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(n \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}}\right) \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)}{\frac{2n+3}{n^3}}\right) = 0 \cdot 1 = 0 \ .
\end{aligned}$$

Exercice 4.

i) $0 \leq a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1\right)} \leq \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

On a donc d'après le théorèmes des gendarmes que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

ii) Rappelons d'abord que la valeur d'une limite ne dépend pas des premiers n_0 termes avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Rappelons aussi que (cf. Ex. 4 de la Série 4)

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ .$$

Pour $n \geq 4$ on a donc

$$2^n \geq \binom{n}{3} \ ,$$

ainsi que $n - 1 \geq \frac{n}{2}$ et $n - 2 \geq \frac{n}{2}$, et on trouve

$$0 \leq a_n = \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}} \leq \frac{n^2}{\frac{1}{6}\cdot n \cdot \frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{2}n} = \frac{24}{n} \ ,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$ par le théorème des deux gendarmes.

iii) On a

$$0 \leq a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\left(\frac{n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \ ,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ par le théorème des deux gendarmes.

iv) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$ on a

$$\frac{2}{m} \leq 1 \ ,$$

et donc

$$0 \leq a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdots \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \leq \frac{2}{n} \cdot 2 \ ,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$ avec le théorème des deux gendarmes.

Exercice 5.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \dfrac{n+1}{n+2}\right) = e^2$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n\right)^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1} \dfrac{n-1}{n}\right) = e^{-1} =$
$\dfrac{1}{e}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = e\,\dfrac{1}{e} = 1$

Exercice 6.

i) FAUX : Prendre $a_n = (-1)^n$, $l = 0$, $\varepsilon = 1$, $n_0 = 0$. La propriété *i)* est bien respectée mais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Le problème est que "pour tout $\varepsilon > 0$" dans la définition de la limite est remplacé par "il existe $\varepsilon > 0$". Supposons que la suite (a_n) est bornée, $|a_n| \leq M$. Alors il existe $\varepsilon = M > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, on a $|a_n| < \varepsilon$. Donc toute suite bornée satisfait la condition *i)* avec $l = 0$ et $n_0 = 0$.

ii) FAUX : Prendre $a_n = (-1)^n$ et $l = 1$. Alors pour tout $\xi > 0$ et $n_0 = 0$, pour tout $n = 2k$ naturels *pairs*, on a $|a_{2k} - l| = |1 - 1| = 0 < \xi$, mail la suite ne converge pas. Le problème est que "pour tout $n \geq n_0$" dans la définition de la limite est remplacé par "il existe une infinité des nombres naturels $n \geq n_0$". Alors la propriété *ii)* nous dit qu'il existe un nombre infini d'éléments de la suite après n_0 qui sont ε-proche de l. Mais il peut également exister un nombre infini d'éléments de la suite après n_0 qui sont arbitrairement loin de l. La propriété *ii)* ne demande pas que tous les éléments de la suite après n_0 soient ε-proche de l, et donc ne demande pas la convergence de la suite vers l, ce qui nous montre le contre-exemple mentionné.

iii) VRAI : Il s'agit exactement de la définition de la limite d'une suite si l'on pose $\varepsilon = 2x$.

iv) FAUX : Prendre $a_0 = 1$, $a_n = \dfrac{3}{n}$ $\forall n \geq 1$ et $\varepsilon = 2$. On a $|a_1 - 0| = 3 > \varepsilon$. La suite a_n converge vers 0, mais la propriété *iv)* n'est pas respectée. Un autre exemple : prendre $a_0 = 1$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n \geq 1$. La suite (a_n) converge vers 0. Mais si on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$, alors on a $4 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ et $|a_4 - 0| = \dfrac{1}{2} > \varepsilon$. En général, la propriété n'est pas respectée pour les suites qui convergent moins vite que $\dfrac{1}{n}$. Par contre, propriété *iv)* implique que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. En effet, la propriété *iv)* nous dit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$. Donc la définition de la limite est satisfaite ; mais de plus, la propriété iv) demande que n_0 dépend de ε de façon précise : $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Cette propriété n'est pas satisfaite par des suites qui convergent lentement, comme par exemple la suite $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 7.

i) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n+1}(x_n - l) + l - x_n = (x_n - l)\left(\dfrac{1}{n+1} - 1\right) = (l - x_n)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

Plusieurs cas apparaissent :

(a) $x_0 < l$:
Par récurrence immédiate on a que $x_0 < l$ implique $x_n < l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par l. La suite est donc strictement croissante et majorée (elle est aussi minorée par x_0). Par propriété, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente.

(b) $x_0 = l$:
La suite est ici constante égale à x_0.

(c) $x_0 > l$:
Par récurrence immédiate on a que $x_0 > l$ implique $x_n > l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par l. La suite est ici strictement décroissante et minorée (elle est aussi majorée par x_0). Par propriété, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente.

On peut démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Notamment, on a

$$x_{n+1} - l = \frac{1}{n+1}(x_n - l) = \frac{1}{n+1}\frac{1}{n}(x_{n-1} - l) = \ldots = \frac{1}{(n+1)!}(x_0 - l)\,.$$

Par les propriété des limites on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}(x_0 - l) = (x_0 - l)\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = (x_0 - l)\cdot 0 = 0$, puisque $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$ implique $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - l) = 0$.

ii) Comme pour la question précédente, on a :

$$x_{n+1} - x_n = (l - x_n)(1 - a_n)$$

Par définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a toujours comme précédemment $(1 - a_n) > 0$. Dès lors, nous sommes sous les mêmes hypothèses que précédemment. Nous pouvons donc tirer les mêmes conclusions, notamment, que la suite (x_n) est convergente. Par contre, il ne suit pas nécessairement que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.